MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN — DAVID HILBERT

OTTO BLUMENTHAL — ERICH HECKE

122. Band · 3. Heft

(ABGESCHLOSSEN AM 24. OKTOBER 1950)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1950

An unsere Mitarbeiter!

Die Korrekturkosten sind bei den „Mathematischen Annalen" sehr hoch. Sie betragen nach einer Kalkulation 6% des Gestehungspreises eines Bandes. Für ihre Verminderung muß unbedingt Sorge getragen werden. Wir richten deshalb an alle unsere Mitarbeiter die freundliche dringende Bitte, zu diesem Ziele an ihrem Teile mit beitragen zu wollen. Dazu ist nötig:

1. Das Manuskript muß *völlig druckfertig* und *gut leserlich* sein (Schreibmaschine oder klare Handschrift, Formeln im allgemeinen handschriftlich). Vorkommende gotische oder griechische Buchstaben sowie einander ähnelnde Zeichen sind besonders zu kennzeichnen, z. B. durch farbige Unterstreichung. Etwaige Abbildungen sind als Skizzen auf besonderen Blättern zu bringen. Die Abbildungs-Unterschriften gehören dagegen zum Text und sind dem Manuskript beizugeben.

2. Veränderungen des Textes in der Korrektur sind auf die Fälle zu beschränken, wo sich nachträglich *wirkliche Irrtümer* herausstellen. Sollte ein Irrtum bemerkt werden, bevor noch Korrektur eingetroffen ist, dann ist ein verbesserter Text sofort an die Redaktion zu schicken, die dafür Sorge tragen wird, daß das Manuskript noch vor dem Satz berichtigt wird.

Insbesondere sind rein stilistische Verbesserungen zu unterlassen. Größere Änderungen und Zusätze, die sich nicht auf die Berichtigung von Irrtümern beschränken, bedürfen der Zustimmung der Redaktion und sollen, auch um der geschichtlichen Genauigkeit willen, in einer Fußnote als nachträglich gekennzeichnet und datiert werden.

Als Norm soll gelten, daß der Verfasser von jeder Arbeit *eine Fahnenkorrektur und eine Korrektur in Bogen* liest. Wir bitten unsere Verfasser, sich hiermit begnügen zu wollen.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen.

Vertriebs-Vertretungen im Ausland:

Schweiz	Lange, Maxwell & Springer A.G., Schützenmattstraße 43, Basel.
Frankreich	Lange, Maxwell & Springer S.A., 24, Rue des Ecoles, Paris (V^e)
England, USA. und übriges Ausland	Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41—45 Neal Street, London, W.C. 2

Die MATHEMATISCHEN ANNALEN

erscheinen zwanglos in Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Sie sind durch jede Buchhandlung zu beziehen. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Mathematischen Annalen bestimmte Manuskripte können bei jedem der unten verzeichneten Redaktionsmitglieder eingereicht werden:

Inhaltsverzeichnis des Heftes auf Seite III

Math. Annalen, Bd. 122, S. 205—220 (1950).

Der zentralsymmetrische Kern und die zentralsymmetrische Hülle von konvexen Körpern.

Von
I. Fáry und L. Rédei in Szeged (Ungarn).

§ 1. Einleitung.

Oft fragt man in der Theorie der konvexen Körper nach solchen konvexen Körpern mit einer gegebenen Eigenschaft, die sich einem festen konvexen Körper ein- bzw. umschreiben lassen und dabei von maximalem bzw. minimalem Volumen sind (man denke z. B. an das Problem der „Inkugel" und „Umkugel"). Unseres Wissens ist der Fall bisher noch nicht behandelt worden, in dem die vorgelegte Eigenschaft die zentrale Symmetrie ist. Die so entstandenen zwei Probleme bilden den Hauptgegenstand dieser Arbeit.

Bezeichne R_n den n-dimensionalen Euklidischen Raum. Einen konvexen Körper (mit innerem Punkt) bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{Z}$; insbesondere soll $\mathfrak{Z}$ stets zentralsymmetrisch sein. Mit $V(\mathfrak{K})$ bezeichnen wir das Volumen von $\mathfrak{K}$. Bei gegebenem $\mathfrak{K}$ nennen wir ein in $\mathfrak{K}$ liegendes $\mathfrak{Z}$ mit maximalem $V(\mathfrak{Z})$ und ein $\mathfrak{K}$ enthaltendes $\mathfrak{Z}$ mit minimalem $V(\mathfrak{Z})$ *zentralsymmetrischen Kern* bzw. *zentralsymmetrische Hülle von* $\mathfrak{K}$ und bezeichnen diese mit $\mathfrak{K}_*$ bzw. $\mathfrak{K}^*$. Ihre Existenz folgt aus dem Auswahlsatz von Blaschke.

Unsere zwei Probleme sind von verschiedener Natur. Für das erste wird sich mit einer leichten Anwendung des Satzes von Brunn-Minkowski Eindeutigkeit herausstellen. Für das zweite liegt Eindeutigkeit nicht immer vor. Wir gewinnen folgende zwei Sätze:

Satz 1. Ein konvexer Körper enthält nur einen zentralsymmetrischen Kern.

Satz 2. Ein regulärer konvexer Körper ist nur in einer zentralsymmetrischen Hülle enthalten. („Regulär" heißt ein konvexer Körper, wenn seine Randpunkte „regulär", d. h. je nur in einer Stützebene enthalten sind.)

Es ist klar, daß $\mathfrak{Z}_*$ und $\mathfrak{Z}^*$ mit $\mathfrak{Z}$ gleich sein müssen, und somit gilt Satz 2 neben den regulären $\mathfrak{K}$ auch für alle $\mathfrak{Z}$. Dagegen werden wir sehen, daß z. B. zum 2-dimensionalen Simplex (zum Dreieck) sogar unendlich viele $\mathfrak{K}^*$ gehören. Es ist uns nicht geglückt, die $\mathfrak{K}$ mit nur einem $\mathfrak{K}^*$ restlos anzugeben.

Die beiden oberen Grenzen

$$c_* = c_*(\mathfrak{K}) = \frac{V(\mathfrak{K}_*)}{V(\mathfrak{K})} = \sup \frac{V(\mathfrak{Z})}{V(\mathfrak{K})} \qquad (\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{K}), \tag{1}$$

$$c^* = c^*(\mathfrak{K}) = \frac{V(\mathfrak{K})}{V(\mathfrak{K}^*)} = \sup \frac{V(\mathfrak{K})}{V(\mathfrak{Z})} \qquad (\mathfrak{Z} \supseteq \mathfrak{K}) \tag{2}$$

nennen wir die *innere* bzw. *äußere Zentrizität von* $\mathfrak{K}$. Diese sind offenbar stets eindeutig bestimmt und als Maß zu betrachten, wie gut sich $\mathfrak{K}$ von innen bzw. außen durch zentralsymmetrische konvexe Körper approximieren läßt. Stets ist

$$0 < c_* \leq 1, \quad 0 < c^* \leq 1$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für die $\mathfrak{K} = \mathfrak{Z}$.

Für Simplexe werden wir c_*, c^* berechnen können (s. unten) und für diesen Fall $c^* < c_*$ finden. Andererseits gibt es auch $\mathfrak{K}$ mit $c_* < c^*$ (ein Beispiel hierfür ist ein Würfel, den man an einer Ecke wenig „abrundet") und so drücken c_* und c^* im allgemeinen zwei wesentlich verschiedene Eigenschaften von $\mathfrak{K}$ aus. Es ist zu vermuten, daß bei jedem n sowohl c_* als auch c^* sein Minimum für die Simplexe annimmt.

Den Mittelpunkt C_* von $\mathfrak{K}_*$ nennen wir das *Quasizentrum* von $\mathfrak{K}$. Ähnlich nennen wir die Menge der Mittelpunkte C^* aller $\mathfrak{K}^*$ die Menge der *Hüllenzentra* von $\mathfrak{K}$. Von dieser Menge werden wir zeigen, daß sie konvex ist (im allgemeinen kann sie auch innere Punkte enthalten, und dann ist sie ein konvexer Körper).

Offenbar sind der zentralsymmetrische Kern $\mathfrak{K}_*$, die zentralsymmetrischen Hüllen $\mathfrak{K}^*$, das Quasizentrum und die Menge der Hüllenzentra affininvariant mit $\mathfrak{K}$ verbunden[1]), außerdem sind die beiden Zentrizitäten c_*, c^* affine Invarianten von $\mathfrak{K}$. Ein Teil dieser Bemerkungen wird beim Beweis der späteren Sätze 5, 6 (s. unten) zu wichtigen Anwendungen kommen.

Wir schalten hier eine einfache Bemerkung über die Körper $\mathfrak{K}_*$, $\mathfrak{K}^*$ ein. Für einen beliebigen Punkt P bezeichne $\mathfrak{K}_P$ das Spiegelbild von $\mathfrak{K}$, das bei der Spiegelung an P entsteht. Bezeichne noch $[\mathfrak{M}]$ die konvexe Hülle einer Punktmenge $\mathfrak{M}$. Dann gilt

$$\mathfrak{K}_* = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{K}_P \; (P = C_*), \tag{3}$$

$$\mathfrak{K}^* = [\mathfrak{K} \cup \mathfrak{K}_P] \; (P = C^*); \tag{4}$$

bei (3) braucht die Eindeutigkeit von $\mathfrak{K}_*$ und C_* (d. h. Satz 1) nicht angenommen zu werden. Die Richtigkeit von (3) folgt daraus, daß die rechte Seite ein in $\mathfrak{K}$ enthaltener zentralsymmetrischer Körper ist, der für $P = C_*$ offenbar $\mathfrak{K}_*$ enthält, und so muß in (3) wegen der Maximaleigenschaft von $\mathfrak{K}_*$ das Gleichheitszeichen gelten. Ebenso beweist man (4).

Da umgekehrt die rechte Seite von (3) und (4) für jedes P ein in $\mathfrak{K}$ enthaltener bzw. $\mathfrak{K}$ enthaltender zentralsymmetrischer konvexer Körper ist (evtl. ohne innere Punkte oder die leere Menge), so liest man von (3) und (4) ab, daß man alle Körper $\mathfrak{K}_*$, $\mathfrak{K}^*$ folgenderweise bestimmen kann. Man bestimme die Punkte P, für die die Funktion $V(\mathfrak{K} \cap \mathfrak{K}_P)$ ihr Maximum bzw. die Funktion $V([\mathfrak{K} \cup \mathfrak{K}_P])$ ihr Minimum annimmt. Für diese Punkte $P\,(= C_*, C^*)$ liefern die Formeln (3), (4) die entsprechenden $\mathfrak{K}_*$, $\mathfrak{K}^*$. Der Beweis von Satz 2 wird so geführt werden, daß wir für reguläre $\mathfrak{K}$ die Einzigkeit der Lösung nachweisen.

Beide Extremumprobleme fassen wir schärfer und allgemeiner. Man bemerke, daß zwei Körper $\mathfrak{K}_P$, $\mathfrak{K}_Q$ nur um eine Verschiebung (mit dem Verschiebungsvektor $2\,\overrightarrow{PQ}$) sich voneinander unterscheiden. Deshalb nehmen wir ganz allgemein zwei konvexe Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ und einen konstanten Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ an, lassen $\mathfrak{L}$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ (geradlinig) bewegen und bezeichnen mit $\mathfrak{L}(t)$ die „Lage" von $\mathfrak{L}$ im Zeitpunkt t, so daß sich $\mathfrak{L}(t)$ mit der üblichen Bezeichnung als Linearkombination

$$\mathfrak{L}(t) = \mathfrak{L} + t\,\mathfrak{v} \tag{5}$$

[1]) Wir betrachten ein volles System $(\mathfrak{M})$ von affinäquivalenten Punktmengen des R_n und ordnen jedem Element $\mathfrak{M}$ von $(\mathfrak{M})$ eine Punktmenge $\mathfrak{M}'$ eindeutig zu. Wir sagen, daß $\mathfrak{M}'$ affininvariant mit $\mathfrak{M}$ verbunden ist, wenn für alle affinen Abbildungen T des R_n auf sich $(T\,\mathfrak{M})' = T\,\mathfrak{M}'$ gilt. Insbesondere muß dann für $T\,\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ auch $T\,\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'$ gelten.

schreiben läßt (selbst $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(0)$ entspricht dem Zeitpunkt $t = 0$). Wir setzen dann

$$\mathfrak{D}(t) = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{L}(t), \quad V_*(t) = V(\mathfrak{D}(t)), \tag{6}$$

$$\mathfrak{H}(t) = [\mathfrak{K} \cup \mathfrak{L}(t)], \quad V^*(t) = V(\mathfrak{H}(t)). \tag{7}$$

Unsere allgemeineren Probleme betreffen dann die Volumina $V_*(t)$, $V^*(t)$ als Funktionen von t. (Es würde keine wesentliche weitere Verallgemeinerung entstehen, wenn auch $\mathfrak{K}$ nicht „ruht", sondern beide Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ sich mit je einer konstanten Geschwindigkeit bewegen.) Insbesondere braucht für $V_*(t)$ nur der Fall betrachtet zu werden, in dem diese Funktion auch Werte $\neq 0$ annimmt. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes engstes Intervall

$$\tau_1 \leq t \leq \tau_2, \tag{8}$$

außerhalb dessen $V_*(t)$ verschwindet.

Mit einem suggestiven Ausdruck können wir sagen, daß der „ruhende Körper" $\mathfrak{K}$ durch den „bewegenden Körper" (das Geschoß) $\mathfrak{L}$ „durchschossen" wird, und dann bezeichnet $\mathfrak{D}(t)$ den augenblicklichen Geschoßteil von $\mathfrak{L}$, der in $\mathfrak{K}$ eingedrungen ist. Auch $\mathfrak{H}(t)$ läßt sich anschaulich so deuten, daß man $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}(t)$ in eine unendlich dehnbare Gummihülle eingefaßt denkt, die dann in jedem Augenblick die Oberfläche von $\mathfrak{H}(t)$ bildet.

In einfachen Fällen (s. Fig. 1) hat man ein sehr anschauliches Bild über den Verlauf der Funktion $V_*(t)$ im Intervall (8), man würde aber bezweifeln (s. Fig. 2), daß sich (8) stets in zwei Teilintervalle teilen läßt, in denen sich $V_*(t)$ monoton verhält. Es wird sich herausstellen,

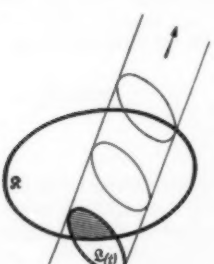

Fig. 1.

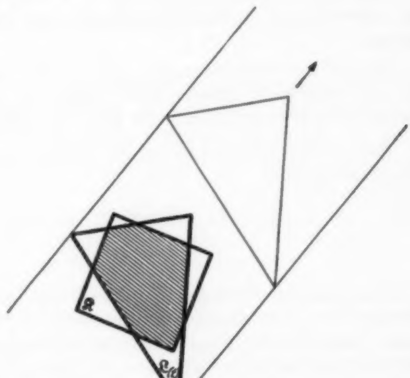

Fig. 2.

daß das trotzdem so ist, und zwar gewinnen wir, ebenfalls mit Hilfe des Satzes von BRUNN-MINKOWSKI, gleich den folgenden viel schärferen

Satz 3. Für die Funktion $V_*(t)$ in (6) ist $\sqrt[n]{V_*(t)}$ im Intervall (8) konkav, d. h.

$$\sqrt[n]{V_*((1-\vartheta)\,t_1 + \vartheta t_2)} \geq (1-\vartheta)\sqrt[n]{V_*(t_1)} + \vartheta \sqrt[n]{V_*(t_2)} \tag{9}$$

$$(\tau_1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \tau_2;\ 0 \leq \vartheta \leq 1)$$

Für das „duale" Problem, betreffend $V^*(t)$ liegen die Verhältnisse leichter (s. Fig 3). Elementarer (ohne Anwendung des Satzes von Brunn-Minkowski), aber mit etwas mehr Rechnung gewinnen wir hierfür den

Satz 4. Die Funktion $V^*(t)$ ist konvex, d. h.

$$V^*((1-\vartheta)t_1+\vartheta t_2)\leqq(1-\vartheta)V^*(t_1)+\vartheta V^*(t_2) \tag{10}$$
$$(-\infty<t_1\leqq t_2<\infty;\ 0\leqq\vartheta\leqq 1).$$

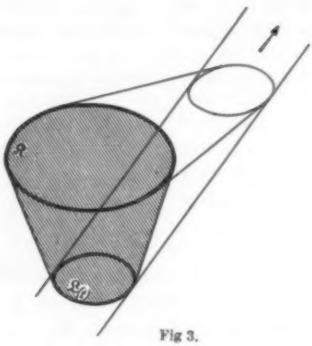

Fig 3.

Aus dem Beweis beider Sätze 3, 4 wäre auch leicht zu entnehmen, wann die betreffenden beiden Funktionen sich in einem Teilintervall linear verhalten.

Die effektive Bestimmung des $\mathfrak{K}_*$ und eines $\mathfrak{K}^*$ ist im allgemeinen keine leichte Aufgabe. Insbesondere führen wir das für das Simplex aus, das wir fortan mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen. Es gilt vor allem der

Satz 5. Ein Simplex $\mathfrak{S}$ hat den Schwerpunkt S zum Quasizentrum und die innere Zentrizität

$$c_*(\mathfrak{S})=(n+1)^{-n}\sum_{0\leqq\nu\leqq\frac{n+1}{2}}(-1)^\nu\binom{n+1}{\nu}(n+1-2\nu)^n. \tag{11}$$

Nach diesem Satz gilt $\mathfrak{S}_*=\mathfrak{S}\cap\mathfrak{S}_S$. Diesen Körper nennen wir einen *Simplexkern*, der nämlich so entsteht, daß man ein Simplex am Schwerpunkt spiegelt und den Durchschnitt beider Simplexe bildet. Offenbar ist der Simplexkern ein Polyeder mit $2n+2$ paarweise parallelen $(n-1)$-dimensionalen Seiten, also ein durch zwei passende parallele Hyperebenen begrenzter Teil eines Parallelotops. Genauer gilt: Bis auf eine Affinität entsteht der Simplexkern so, daß man einen Würfel mit zwei parallelen Ebenen schneidet, die auf einer Diagonale senkrecht stehen und aus dieser den n-ten Teil in der Mitte herausschneiden. Wie einfach das auch lautet, so läßt sich der Simplexkern trotzdem nicht ganz leicht restlos beschreiben, und so erweist sich insbesondere die Herleitung von (11), was der Berechnung von $V(\mathfrak{S}_*)$ gleichkommt, als eine ziemlich komplizierte, interessante kombinatorische Aufgabe. (Für $n=2, 3$ ist $\mathfrak{S}_*$ ein affinregelmäßiges Sechseck, d. h. das Affinbild eines regelmäßigen Sechsecks bzw. ein Parallelоktaeder,

d. h. ein Oktaeder mit parallelen Seitenpaaren; beide Spezialfälle spielen in mehreren Untersuchungen eine Rolle, dagegen wurde der Fall $n \geqq 4$ unseres Wissens bisher noch nicht betrachtet.)

Das „duale" von Satz 5 lautet so:

Satz 6. Für ein Simplex $\mathfrak{S}$ gehört der Schwerpunkt S zur Menge der Hüllenzentra. Die äußere Zentrizität von $\mathfrak{S}$ ist

$$c^*(\mathfrak{S}) = \binom{n}{n_0}^{-1}, \tag{12}$$

wobei $n_0 = \frac{n}{2}$ (für $2 \mid n$) bzw. $n_0 = \frac{n-1}{2}$ (für $2 \nmid n$) ist.

Hieraus bekommt man die eine zentralsymmetrische Hülle $\mathfrak{S}^*$ von $\mathfrak{S}$ so, daß man die konvexe Hülle von $\mathfrak{S} \cup \mathfrak{S}_S$ bildet. (Für $n = 2, 3$ handelt es sich um das affinregelmäßige Sechseck bzw. um das Parallelotop.)

Wir tabellieren einige Anfangswerte von (11) und (12):

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$c_*(\mathfrak{S})$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{46}{125}$	$\frac{22}{81}$	$\frac{3364}{16807}$	$\frac{151}{1024}$	$\frac{419558}{4782964}$
$c^*(\mathfrak{S})$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{70}$

Herr P. Turán hat (11) die geschlossene Form

$$c_*(\mathfrak{S}) = \frac{1}{\pi}\, n! \left(\frac{2}{n+1}\right)^n \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1} d\,t \tag{13}$$

gegeben; den Beweis teilen wir mit seiner freundlichen Erlaubnis mit. Auf Grund von (13) und (12) gewinnen wir leicht gute Abschätzungen für $c_*(\mathfrak{S})$ und $c^*(\mathfrak{S})$, woraus auch die oben erwähnte Ungleichung

$$c_*(\mathfrak{S}) > c^*(\mathfrak{S}) \tag{14}$$

und außerdem

$$\lim_{n=\infty} c_*(\mathfrak{S}) \; (= \lim_{n=\infty} c^*(\mathfrak{S})) = 0 \tag{15}$$

folgen wird. Letzteres lehrt die interessante Eigenschaft des Euklidischen Raumes, daß es in ihm bei genügend hoher Dimension konvexe Körper mit beliebig kleiner (innerer und äußerer) Zentrizität gibt, weshalb man sagen kann, daß R_n „im kleinen" mit wachsendem n über alle Grenzen „schief" („asymmetrisch") wird.

§ 2. Beweis von Satz 1.

Die Punkte von R_n stellen wir als Ortsvektoren $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ dar mit rechtwinkligen Koordinaten x_i.

Zuerst beweisen wir den folgenden:

Hilfssatz 1. Sind $\mathfrak{Z}_0$, $\mathfrak{Z}_1$ verschiedene zentralsymmetrische konvexe Körper mit $V(\mathfrak{Z}_0) = V(\mathfrak{Z}_1)$, so enthält ihre konvexe Hülle einen weiteren zentralsymmetrischen konvexen Körper $\mathfrak{Z}$ mit $V(\mathfrak{Z}) > V(\mathfrak{Z}_0)$.

Es ist nämlich klar, daß alle Glieder der Linearkombination

(16) $$\mathfrak{Z}_\vartheta = (1-\vartheta)\,\mathfrak{Z}_0 + \vartheta\,\mathfrak{Z}_1 \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

ebenfalls zentralsymmetrisch sind. Andererseits ist bekanntlich $\mathfrak{Z}_\vartheta$ in der konvexen Hülle $\mathfrak{H} = [\mathfrak{Z}_0 \cup \mathfrak{Z}_1]$ enthalten. Hieraus folgt im Falle $V(\mathfrak{Z}_\vartheta) > V(\mathfrak{Z}_0)$ die Richtigkeit des Hilfssatzes, und so brauchen wir nur noch den Fall

$$V(\mathfrak{Z}_\vartheta) \leqq V(\mathfrak{Z}_0) \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

zu betrachten. Nach dem Satz von Brunn-Minkowski folgt hieraus, daß $\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}_1$ durch eine Verschiebung auseinander entstehen. Dann ist selbst $\mathfrak{H}$ zentralsymmetrisch, womit wir den Hilfssatz wegen $V(\mathfrak{H}) > V(\mathfrak{Z}_0)$ bewiesen haben.

Hieraus gewinnen wir leicht Satz 1. Enthielte nämlich ein $\mathfrak{K}$ zwei verschiedene zentralsymmetrische konvexe Körper $\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}_1$ mit maximalem Volumen, so folgte hieraus wegen $[\mathfrak{Z}_0 \cup \mathfrak{Z}_1] \subseteq \mathfrak{K}$ sofort ein Widerspruch mit Hilfssatz 1.

§ 3. Beweis von Satz 3.

Zum Beweis von Satz 3 bezeichne $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ je einen Punkt von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$. Da $\mathfrak{y}$ im Zeitpunkt t sich in der Lage $\mathfrak{y} + t\,\mathfrak{v}$ befindet, so besteht $\mathfrak{D}(t)$ aus denjenigen $\mathfrak{x}$, die sich auch als

(17) $$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + t\,\mathfrak{v}$$

schreiben lassen.

Hieraus folgt, daß die $\mathfrak{D}(t)$ $(\tau_1 \leqq t \leqq \tau_2)$ eine konkave Schar bilden, d. h.

(18) $$\mathfrak{D}((1-\vartheta)\,t_1 + \vartheta\,t_2) \geqq (1-\vartheta)\,\mathfrak{D}(t_1) + \vartheta\,\mathfrak{D}(t_2) \quad (\tau_1 \leqq t_1 < t_2 \leqq \tau_2;\ 0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

gilt. Die rechte Seite besteht nämlich aus allen Punkten

(19) $$(1-\vartheta)\,\mathfrak{x}_1 + \vartheta\,\mathfrak{x}_2,$$

wobei nach (17) $\mathfrak{x}_i \in \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{y}_i = \mathfrak{x}_i - t_i\,\mathfrak{v} \in \mathfrak{L}$ $(i = 1, 2)$ gilt. Da sich (19) auch als

$$(1-\vartheta)\,\mathfrak{y}_1 + \vartheta\,\mathfrak{y}_2 + ((1-\vartheta)\,t_1 + \vartheta\,t_2)\,\mathfrak{v}$$

schreiben läßt und dies (wegen der Konvexität von $\mathfrak{L}$) offenbar ein Punkt von $\mathfrak{L}((1-\vartheta)\,t_1 + \vartheta\,t_2)$ ist, so gehört (19) auch zu der linken Seite von (18), womit (18) bewiesen ist.

Hieraus folgt nach dem Satz von Brunn-Minkowski sofort der Satz 3.

§ 4. Beweis der Sätze 2, 4.

Wir wollen die in (7) definierte konvexe Hülle $\mathfrak{H}(t)$ untersuchen. Hierzu nehmen wir eine Ebene $\mathfrak{E}$ an, die auf dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{L}(t)$ senkrecht steht; mit ihrer Hilfe können wir dann die Punkte $\mathfrak{y}$ einer beliebigen, mit $\mathfrak{v}$ parallelen und gleichgerichteten Geraden $\mathfrak{g}$ in der Form

(20) $$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + t\,\mathfrak{v}$$

angeben, wobei $\mathfrak{x}$ den Schnittpunkt von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{E}$ bezeichnet und die Richtung von $\mathfrak{g}$ den zunehmenden Werten von t entspricht. Dann hat es einen Sinn, von dem ersten bzw. letzten Schnittpunkt von $\mathfrak{g}$ mit einer beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge zu sprechen.

Die Geraden $\mathfrak{g}$ durch die Punkte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}(t)$ bilden je einen (unendlichen) Zylinder, von denen auch der zweite von t unabhängig ist. Die konvexe

Hülle beider Zylinder ist wieder ein Zylinder, der aus den mindestens ein $\mathfrak{H}(t)$ schneidenden Geraden $\mathfrak{g}$ besteht. Den Durchschnitt des *Inneren* dieses Zylinders mit der Ebene $\mathfrak{E}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}'$, das dann ein $(n-1)$-dimensionales konvexes *Gebiet* ist.

Bezeichne $f(\mathfrak{x}, t)$ die Länge des in $\mathfrak{H}(t)$ enthaltenen Teiles von $\mathfrak{g}$. Es ist klar, daß $f(\mathfrak{x}, t)$ als Funktion von $\mathfrak{x}$ $(\in \mathfrak{H}')$ und t stetig ist. Wir beweisen den

Hilfssatz 2. Bei jedem $\mathfrak{x}$ ist $f(\mathfrak{x}, t)$ eine konvexe Funktion von t, d. h. es gilt:

$$f(\mathfrak{x}, (1-\vartheta)t' + \vartheta t'') \leqq (1-\vartheta) f(\mathfrak{x}, t') + \vartheta f(\mathfrak{x}, t''). \tag{21}$$

Bemerken wir zunächst, daß die Punkte von $\mathfrak{H}(t)$ die folgenden sind:

$$\mathfrak{y} = (1-\varkappa)\mathfrak{k} + \varkappa(\mathfrak{l} + t\mathfrak{v}) \qquad (\mathfrak{k} \in \mathfrak{K}, \mathfrak{l} \in \mathfrak{L}; 0 \leqq \varkappa \leqq 1). \tag{22}$$

Dabei ist (22) ein Punkt der mit $\mathfrak{v}$ parallelen Gerade $(1-\varkappa)\mathfrak{k} + \varkappa\mathfrak{l} + t\mathfrak{v}$.

Betrachten wir zwei beliebige Punkte von $\mathfrak{H}((1-\vartheta)t' + \vartheta t'')$:

$$\mathfrak{y}_i = (1-\varkappa_i)\mathfrak{k}_i + \varkappa_i(\mathfrak{l}_i + ((1-\vartheta)t' + \vartheta t'')\mathfrak{v}) \qquad (i = 1, 2) \tag{23}$$

mit passenden $\mathfrak{k}_i \in \mathfrak{K}$, $\mathfrak{l}_i \in \mathfrak{L}$, $0 \leqq \varkappa_i \leqq 1$. Wird

$$\mathfrak{y}_i' = (1-\varkappa_i)\mathfrak{k}_i + \varkappa_i(\mathfrak{l}_i + t'\mathfrak{v}), \tag{24}$$

$$\mathfrak{y}_i'' = (1-\varkappa_i)\mathfrak{k}_i + \varkappa_i(\mathfrak{l}_i + t''\mathfrak{v}) \tag{25}$$

gesetzt, so gilt nach (23)

$$\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1 = (1-\vartheta)(\mathfrak{y}_2' - \mathfrak{y}_1') + \vartheta(\mathfrak{y}_2'' - \mathfrak{y}_1''). \tag{26}$$

Insbesondere wenn $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ der erste und letzte Schnittpunkt von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{H}((1-\vartheta)t' + \vartheta t'')$ sind, so gilt

$$|\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1| = f(\mathfrak{x}, (1-\vartheta)t' + \vartheta t''), \tag{27}$$

wobei $|\mathfrak{a}|$ die Länge eines Vektors $\mathfrak{a}$ bezeichnet. Andererseits liegen jetzt nach (23)—(25) die Punkte $\mathfrak{y}_i', \mathfrak{y}_i''$ auch in $\mathfrak{g}$, außerdem in $\mathfrak{H}(t')$ bzw. $\mathfrak{H}(t'')$, und daher gilt

$$|\mathfrak{y}_2' - \mathfrak{y}_1'| \leqq f(\mathfrak{x}, t'), \quad |\mathfrak{y}_2'' - \mathfrak{y}_1''| \leqq f(\mathfrak{x}, t''). \tag{28}$$

Aus (26)—(28) folgt die Richtigkeit von Hilfssatz 2.

Es gilt für das Volumen von $\mathfrak{H}(t)$

$$V^*(t) = \int_{\mathfrak{H}'} f(\mathfrak{x}, t)\, d\mathfrak{x}, \tag{29}$$

wobei $d\mathfrak{x}$ das Volumenelement der Ebene $\mathfrak{E}$ bezeichnet. Dies und Hilfssatz 2 beweisen den Satz 4.

Um auch Satz 2 zu beweisen, beschränken wir uns jetzt auf reguläre $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$. Über den „Grenzfall" im Hilfssatz beweisen wir den folgenden:

Hilfssatz 3. Sind die Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ regulär und ist die Funktion $f(\mathfrak{x}, t)$ für einen Punkt $\mathfrak{x} \in \mathfrak{H}'$ in einem Intervall $t' \leqq t \leqq t''$ linear, so gehört der erste und der letzte Schnittpunkt der Gerade $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{H}(t)$ je genau einem der Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}(t)$ an.

Betrachten wir nämlich ein festes t mit $t' < t < t''$. Wieder bezeichnen $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ den ersten und den letzten Schnittpunkt von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{H}(t)$, die sich dann in der Form (22) schreiben lassen mit *festen* $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_i$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_i$, $\varkappa = \varkappa_i$ $(i = 1, 2)$. Bestimmen wir dann ϑ aus $t = (1-\vartheta)t' + \vartheta t''$ $(0 < \vartheta < 1)$, so tritt (23) wieder in Geltung, außerdem behalten wir die Bezeichnungen in (24), (25)

Da jetzt in (21) das Gleichheitszeichen gilt, so muß dasselbe wegen (26), (27) und $0 < \vartheta < 1$ auch für (28) zutreffen. Dies bedeutet, daß (24) bzw. (25) für $i = 1, 2$ der erste und letzte Schnittpunkt von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{H}(t')$ bzw. $\mathfrak{H}(t'')$ sind. Dieser Schluß gilt auch für alle Teilintervalle von $t' \leqq t \leqq t''$ (die t ebenfalls enthalten), und so haben wir gewonnen, daß für den ersten und letzten Schnittpunkt von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{H}(t)$

$$\mathfrak{y}_i(t) = (1 - \varkappa_i)\,\mathfrak{k}_i + \varkappa_i(\mathfrak{l}_i + t\,\mathfrak{v}) \qquad (i = 1, 2;\ t' \leqq t \leqq t'') \tag{30}$$

gilt, wobei $\mathfrak{k}_i$, $\mathfrak{l}_i$, $\varkappa_i$ fest sind und nicht von t abhängen.

Wir zeigen, daß sowohl $\varkappa_1$ als auch $\varkappa_2$ nur 0 oder 1 sein kann, was offenbar der Richtigkeit von Hilfssatz 3 gleichkommt. Nehmen wir an, daß $0 < \varkappa_i < 1$ gilt ($i = 1$ oder 2). Dann sind $\mathfrak{k}_i$, $\mathfrak{l}_i + t\,\mathfrak{v}$ ($i = 1, 2$) Grenzpunkte von $\mathfrak{H}(t)$ (also auch von $\mathfrak{K}$), denn sonst würde aus (30) folgen, daß auch $\mathfrak{y}_i(t)$ ein innerer Punkt von $\mathfrak{H}(t)$ ist, was aber nach der Definition von $\mathfrak{y}_i(t)$ falsch ist. Die Stützebene $\mathfrak{E}^*$ von $\mathfrak{K}$ in dem Punkte $\mathfrak{k}_i$ ist nach vorigem eine Stützebene von $\mathfrak{H}(t)$ ($t' \leqq t \leqq t''$). Wir behaupten, daß die Gerade $\mathfrak{g}$ in der Ebene $\mathfrak{E}^*$ liegt. Die Gerade durch $\mathfrak{k}_i$, $\mathfrak{l}_i + t'\,\mathfrak{v}$ geht durch die Grenzpunkte $\mathfrak{k}_i$, $\mathfrak{l}_i + t'\,\mathfrak{v}$, $\mathfrak{y}_i(t')$ von $\mathfrak{H}(t')$, und so ist diese Gerade eine Stützgerade (von $\mathfrak{H}(t')$ also auch) von $\mathfrak{K}$; dasselbe gilt über die Gerade durch $\mathfrak{k}_i$, $\mathfrak{l}_i + t''\,\mathfrak{v}$. Offenbar liegen diese Stützgeraden auch in der Ebene $\mathfrak{E}^*$, und da sie durch $\mathfrak{g}$ geschnitten werden, gilt auch $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{E}^*$. Diese Folgerung steht aber im Widerspruch mit der Annahme, daß die Gerade $\mathfrak{g}$ durch innere Punkte von $\mathfrak{H}(t)$ geht (da $\mathfrak{x} \in \mathfrak{H}'$ ist). Dieser Widerspruch beweist den Hilfssatz 3.

Zum Beweis von Satz 2 nehmen wir an, daß zu einem regulären konvexen Körper $\mathfrak{K}$ zwei verschiedene zentralsymmetrische Hüllen $\mathfrak{K}_1^*$, $\mathfrak{K}_2^*$ gehören. Die Mittelpunkte dieser Körper bezeichnen wir mit $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}_2$, so daß dann nach (4)

$$\mathfrak{K}_i^* = [\mathfrak{K} \cup \mathfrak{K}_{\mathfrak{o}_i}] \qquad (i = 1, 2)$$

gelten. Wir setzen $\mathfrak{v} = \mathfrak{o}_2 - \mathfrak{o}_1$ und definieren den (sich „bewegenden") konvexen Körper

$$\mathfrak{L}(t) = \mathfrak{K}_{\mathfrak{o}_1} + t\,\mathfrak{v}.$$

Dann gilt $\mathfrak{L}(0) = \mathfrak{K}_{\mathfrak{o}_1}$ und wegen $\mathfrak{K}_{\mathfrak{x}} = 2\,\mathfrak{x} - \mathfrak{K}$ auch $\mathfrak{L}(2) = \mathfrak{K}_{\mathfrak{o}_2}$. Mit $\mathfrak{H}(t) = [\mathfrak{K} \cup \mathfrak{L}(t)]$ haben wir also

$$\mathfrak{K}_1^* = \mathfrak{H}(0), \quad \mathfrak{K}_2^* = \mathfrak{H}(2).$$

Wegen der Annahme gilt $V(\mathfrak{K}_1^*) = V(\mathfrak{K}_2^*)$ und so folgt aus Satz 4 mit der Bezeichnung (7): $V^*(t) \leqq V^*(0)$ $(= V^*(2))$ für $0 \leqq t \leqq 2$. Da aber $\mathfrak{H}(t)$ stets zentralsymmetrisch ist und $\mathfrak{K}$ enthält, so folgt, daß $V^*(t)$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ konstant ist. Da weiter der Integrand $f(\mathfrak{x}, t)$ in (29) für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{H}'$ stetig ist, so muß selbst $f(\mathfrak{x}, t)$ für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{H}'$ im Intervall $0 \leqq t \leqq 2$ konstant sein. Nach Hilfssatz 2 gehören dann der erste und letzte Schnittpunkt aller Geraden $\mathfrak{g}$ in (20) (mit $\mathfrak{x} \in \mathfrak{H}'$) je nur einem der Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}(t)$ zu. Das sind insgesamt vier Möglichkeiten, denen entsprechend man die genannten $\mathfrak{g}$ in vier *elementenfremde* Klassen einteilen kann. Schneidet man durch die Ebene $\mathfrak{E}$, so entsteht eine Einteilung der Punkte des Gebietes $\mathfrak{H}'$ ebenfalls in vier Klassen, die aber offenbar relativ abgeschlossen bezüglich $\mathfrak{H}'$ sind, und so müssen diese Klassen bis auf eine von ihnen leer sein.

Gehören der erste und letzte Schnittpunkt aller genannten Geraden $\mathfrak{g}$ zu $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{L}(t)$ für $0 \leqq t \leqq 2$, so zeigt (29), daß $V^*(t)$ in diesem Intervall

monoton zu- oder abnimmt, ohne konstant zu bleiben, und das ist ein Widerspruch. Gehören dagegen alle diese Schnittpunkte zu $\mathfrak{K}$, so folgt $\mathfrak{L}(t) \subseteq \mathfrak{K}$ $(0 \leqq t \leqq 2)$, was wegen der Definition von $\mathfrak{L}(t)$ wieder unmöglich ist. Bei den übriggebliebenen zwei Fällen vertauschen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}(t)$ einfach ihre Rollen, und so führen auch diese Fälle zu einem Widerspruch, womit Satz 2 bewiesen ist.

Bemerkung. Wird

$$\mathfrak{D}_P = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{K}_P, \quad \mathfrak{H}_P = [\mathfrak{K} \cup \mathfrak{K}_P],$$

$$V_*(P) = V(\mathfrak{D}_P), \quad V^*(P) = V(\mathfrak{H}_P)$$

gesetzt, so beweist man auf Grund von Satz 3 bzw. einer der obigen ähnlichen Konstruktion, daß die P mit

$$V_*(P) \geqq c \quad \text{bzw.} \quad V^*(P) \leqq c$$

je eine konvexe Punktmenge bilden. Insbesondere folgt aus dem letzteren (bei Anwendung für $c = c^*$), daß die Menge der Hüllenzentra von $\mathfrak{K}$ konvex ist, wie wir das in der Einleitung behauptet haben.

§ 5. Bestimmung des Simplexkernes und Beweis von Satz 5.

Zunächst beweisen wir den folgenden

Hilfssatz 4. Gehört eine konvexe Punktmenge $\mathfrak{M}$ $(\neq 0)$ dem n-dimensionalen Simplex $\mathfrak{S}$ affininvariant zu, so liegt der Schwerpunkt S von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{M}$.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_n$ die Ecken von $\mathfrak{S}$ und betrachten einen Punkt von $\mathfrak{M}$, wofür wir dann

$$\mathfrak{x} = \mu_0 \mathfrak{a}_0 + \cdots + \mu_n \mathfrak{a}_n \qquad (\mu_0 + \cdots + \mu_n = 1) \tag{31}$$

setzen können mit eindeutig bestimmten μ_i. Bezeichne T_i $(i = 1, \ldots, (n+1)!)$ die affinen Abbildungen des R_n auf sich, die $\mathfrak{S}$ in sich überführen. Wegen der Annahme gehören alle Punkte $T_i\,\mathfrak{x}$ zu $\mathfrak{M}$ und so liegt ihr Schwerpunkt

$$S' = \frac{1}{m}(T_1\,\mathfrak{x} + \cdots + T_m\,\mathfrak{x}) \qquad (m = (n+1)!) \tag{32}$$

ebenfalls in $\mathfrak{M}$. Alle $T_i\,\mathfrak{x}$ entstehen so, daß man auf die $\mathfrak{a}_i$ in (31) sämtliche Permutationen ausübt. Nach Einsetzung in (2) tritt dann jedes $\mathfrak{a}_i$ mit demselben Koeffizienten $n!\,(\mu_0 + \cdots + \mu_n) = n!$ auf, und so folgt:

$$S' = \frac{1}{n+1}(\mathfrak{a}_0 + \cdots + \mathfrak{a}_n)\,.$$

Hiernach gilt $S' = S$, womit Hilfssatz 4 bewiesen ist.

Insbesondere besagt dieser, daß es außer S keinen Punkt mehr gibt, der mit $\mathfrak{S}$ affininvariant verbunden ist, und so muß das nach Satz 1 eindeutig bestimmte Quasizentrum C_* mit S zusammenfallen, womit die erste Behauptung von Satz 5 bewiesen ist.

Zum Beweis der zweiten Hälfte von Satz 5 müssen wir den Simplexkern $\mathfrak{S}_*$ näher untersuchen, wobei es genügt, ein spezielles Simplex $\mathfrak{S}$ zu betrachten. Wir wählen das durch die Hyperebenen

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \; x_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{33}$$

die wir der Reihe nach mit $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$ bezeichnen, begrenzte $\mathfrak{S}$. Die den σ_i gegenüberliegenden Ecken bezeichnen wir mit $A_0, \ldots, A_n$. Es gilt

$$(34)\qquad \begin{aligned} A_0 &= (0, \ldots, 0),\\ A_1 &= (1, \ldots, 0),\\ &\vdots\\ A_n &= (0, \ldots, 1), \end{aligned}$$

d. h. A_0 ist der Anfangspunkt, A_i der Einheitspunkt der x_i-Achse. Das Quasizentrum, d. h. der Schwerpunkt, ist

$$(35)\qquad S = \left(\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1}\right).$$

Die Spiegelung an S ist durch

$$(36)\qquad x_i' = \frac{2}{n+1} - x_i$$

gegeben. Für das gespiegelte Simplex $\mathfrak{S}_S$ schreiben wir kurz $\mathfrak{S}'$. Dieses wird durch die gespiegelten Hyperebenen

$$(37)\qquad x_1 + \cdots + x_n = \frac{n-1}{n+1}, \quad x_i = \frac{2}{n+1} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

begrenzt und hat die Ecken

$$(38)\qquad \begin{aligned} A_0' &= \left(\frac{2}{n+1}, \ldots, \frac{2}{n+1}\right),\\ A_1' &= \left(-\frac{n-1}{n+1}, \ldots, \frac{2}{n+1}\right),\\ &\vdots\\ A_n &= \left(\frac{2}{n+1}, \ldots, -\frac{n-1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Für eine Hyperebene σ außerhalb S bezeichnen wir den S enthaltenden und den anderen Halbraum von σ mit σ^+ bzw. σ^-. Dann ist $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}_*$ der Durchschnitt bzw. aller σ_i^+, aller $\sigma_i'^+$, aller σ_i^+, $\sigma_i'^+$.

Wir führen das Symbol $\Delta = \Delta(\delta_0, \ldots, \delta_n)$ ein ($\delta_i = \pm 1$) mit folgender Bedeutung. Man lasse einem $\delta_i = 1$ den Halbraum σ_i^+ und einem $\delta_i = -1$ den Halbraum $\sigma_i'^-$ entsprechen und definiere Δ als den Durchschnitt dieser $n+1$ Halbräume. Jedes σ_i^+, $\sigma_i'^-$ ist ein Paar (durch parallele Ebenen begrenzter) gleichgerichteter Halbräume mit

$$(39)\qquad \sigma_i'^- \subset \sigma_i^+.$$

Da nach obigem $\mathfrak{S} = \Delta(1, \ldots, 1)$ gilt, so folgt hieraus, daß jedes Δ entweder „leer" oder ein $\mathfrak{S}$ ähnliches (genauer homothetisches) Simplex oder eventuell ein einziger Punkt ist, und es gilt auch $\Delta \subseteq \mathfrak{S}$. Weiter unten bestimmen wir die Δ genauer.

Wir zeigen, daß die „Zerlegung" gilt:

$$(40)\qquad \mathfrak{S}_* = \Sigma\, \delta_0 \ldots \delta_n\, \Delta(\delta_0, \ldots, \delta_n),$$

wobei man über alle $\delta_i = \pm 1$ zu summieren hat (die Glieder darf man außer acht lassen, in denen Δ leer oder ein Punkt ist). Selbstverständlich ist diese Gleichung (40) so zu verstehen: Man betrachte einen beliebigen Punkt P von $\mathfrak{S}$, fasse die Δ ins Auge, die P enthalten, dann ist die Summe der Koeffizienten $\delta_0 \ldots \delta_n$ ($= \pm 1$) dieser Δ gleich 1 oder 0, je nachdem $P \in \mathfrak{S}_*$

gilt oder nicht gilt; eine Ausnahme können nur die P bilden, die mindestens einem σ_i oder σ'_i angehören.

Um (40) zu beweisen, betrachten wir einen Punkt P von $\mathfrak{S}$ außerhalb aller Ebenen σ_i, σ'_i. Wir bestimmen die i ($= 0, \ldots, n$), für die $P \in \sigma_i'^-$ gilt. Die Menge dieser i bezeichnen wir mit J. Wegen (39) gilt $P \in \Delta\,(\delta_0, \ldots, \delta_n)$ dann und nur dann, wenn $\delta_i = 1$ ($i \notin J$) ist. (Die übrigen δ_i (d. h. die mit $i \in J$) dürfen beide Werte ± 1 annehmen.) Ist also J nicht leer, so ist die Koeffizientensumme dieser Δ in (40) gleich 0. Von 0 verschieden, und zwar gleich 1 ist diese Summe dann und nur dann, wenn J leer ist, da in diesem Fall nur $\delta_0 = \cdots = \delta_n = 1$ zuzulassen ist. Andererseits ist J leer dann und nur dann, wenn P in keinem $\sigma_i'^-$, d. h. in jedem $\sigma_i'^+$ enthalten ist. Der Durchschnitt letzterer Halbräume ist eben $\mathfrak{S}'$, und so machen die genannten P gerade die Punkte von $\mathfrak{S}_* = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}'$ aus (bis auf die Punkte der σ_i, σ'_i). Das beweist (40).

Hieraus folgt sofort

$$V\,(\mathfrak{S}_*) = \Sigma\, \delta_0 \ldots \delta_n\, V\,(\Delta\,(\delta_0, \ldots, \delta_n)). \tag{41}$$

Wegen der Affinsymmetrie von $\mathfrak{S}$ ist klar, daß $V\,(\Delta\,(\delta_0, \ldots, \delta_n))$ nur davon abhängt, wie viele δ_i gleich -1 sind. Betrachten wir deshalb

$$\Delta_k = \Delta\,(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1) \qquad (k = 0, \ldots, n+1), \tag{42}$$

wobei k die Anzahl der eingeklammerten -1 bezeichnet. Dann gilt

$$V\,(\mathfrak{S}_*) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} V\,(\Delta_k). \tag{43}$$

Explizit heißt (42):

$$\Delta_k = \sigma_0^+ \cap \cdots \cap \sigma_{n-k}^+ \cap \sigma_{n-k+1}'^- \cap \cdots \cap \sigma_n'^- . \tag{44}$$

Nach (33), (35), (37) sind die σ_i^+, $\sigma_i'^-$ die folgenden Halbräume:

$$\left.\begin{array}{lll} (45) & \sigma_0^+ : x_1 + \cdots + x_n \leq 1, & \sigma_i^+ : x_i \geq 0 \\ (46) & \sigma_0'^- : x_1 + \cdots + x_n \leq \dfrac{n-1}{n+1}, & \sigma_i'^- : x_i \geq \dfrac{2}{n+1} \end{array}\right\} (i = 1, \ldots, n).$$

Vor allem sehen wir, daß (46) keine Lösung hat, und das bedeutet

$$\Delta_{n+1} = 0. \tag{47}$$

Wir betrachten dann den Fall $k \leq n$. Jetzt besteht Δ_k aus den Punkten $\mathfrak{x} = (x_1 \ldots, x_n)$ mit

$$x_1 + \cdots + x_n \leq 1;\; x_1, \ldots, x_{n-k} \geq 0;\; x_{n-k+1}, \ldots, x_n \geq \frac{2}{n+1}. \tag{48}$$

Die Bedingung der Lösbarkeit lautet offenbar $\dfrac{2k}{n+1} \leq 1$, d. h.

$$k \leq \frac{n+1}{2}. \tag{49}$$

Dies mit (47) zusammen besagt, daß dann und nur dann $\Delta_k \neq 0$ ist, wenn (49) gilt. Ist dies der Fall, so ist Δ_k das durch (48) bestimmte Simplex (im Grenzfall $k = \dfrac{n+1}{2}$ artet Δ_k in einem Punkt aus). Die eine (n-dimensionale) Seitenfläche von Δ_k liegt in der Ebene

$$x_1 + \cdots + x_n = 1,$$

und die gegenüberliegende Ecke hat die Koordinaten

$$x_1 = \cdots = x_{n-k} = 0, \quad x_{n-k+1} = \cdots = x_n = \frac{2}{n+1}.$$

Beide haben den Abstand

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{2k}{n+1}\right).$$

Da alle Δ_k homothetisch sind und insbesondere $\Delta_0 = \mathfrak{S}$ gilt, so haben wir bekommen

$$V(\Delta_k) : V(\mathfrak{S}) = \left(1 - \frac{2k}{n+1}\right)^n \qquad \left(k \leqq \frac{n+1}{2}\right) \tag{50}$$

(auch für $k = \frac{n+1}{2}$ richtig). In (43) genügt es, nur über die k in (49) zu summieren. Dividiert man dann (43) durch $V(\mathfrak{S})$, wodurch links $c_*(\mathfrak{S})$ entsteht, und setzt rechts (50) ein, so gewinnt man (11). Hiermit haben wir Satz 5 bewiesen.

§ 6. Bestimmung einer zentralsymmetrischen Hülle des Simplexes und Beweis von Satz 6.

Um Satz 6 zu beweisen, genügt es, daß wir eine beliebige zentralsymmetrische Hülle $\mathfrak{S}_0^*$ eines beliebigen (n-dimensionalen) Simplexes $\mathfrak{S}$ bestimmen. Deshalb nehmen wir an, daß der Schwerpunkt von $\mathfrak{S}$ in 0 fällt. Die Ecken bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n+1}$, so daß dann

$$\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_{n+1} = 0 \tag{51}$$

gilt.

Da die Menge der Hüllenzentra von $\mathfrak{S}$ affininvariant mit $\mathfrak{S}$ verbunden und nach der Bemerkung am Schluß des § 4 auch konvex ist, so folgt aus Hilfssatz 4, daß sie den Schwerpunkt 0 von $\mathfrak{S}$ enthält. Wenn wir also $\mathfrak{S}$ an 0 spiegeln und die konvexe Hülle mit $\mathfrak{S}$ bilden, so entsteht ein $\mathfrak{S}_0^*$. An diesem halten wir im folgenden fest. Dann ist $\mathfrak{S}_0^*$ die konvexe Hülle aller Punkte $\pm\mathfrak{a}_1, \ldots, \pm\mathfrak{a}_{n+1}$. Wir beweisen den folgenden

Hilfssatz 5. Man setze $n = 2k$ bzw. $n = 2k - 1$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Greift man auf alle Weise k Punkte $\mathfrak{a}_i$ und k Punkte $-\mathfrak{a}_i$ heraus, ohne dabei ein i zweimal zu benutzen, bildet jedesmal die konvexe Hülle dieser $2k$ Punkte, so entstehen gerade alle verschiedenen ($n-1$-dimensionalen) Seitenflächen von $\mathfrak{S}_0^*$. Ihre Anzahl ist also $(k+1)\binom{n+1}{k}$ bzw. $\binom{n+1}{k}$.

Betrachten wir nämlich eine Hyperebene $\mathfrak{E}$ durch eine Seitenfläche von $\mathfrak{S}_0^*$. Diese kann kein Punktepaar $\pm\mathfrak{a}_i$ enthalten, denn dann müßte $\mathfrak{E}$ durch 0 gehen. Andererseits enthält $\mathfrak{E}$ gewiß mindestens n Punkte $\pm\mathfrak{a}_i$, und so genügt es aus Symmetriegründen, nur den Fall zu betrachten, in dem $\mathfrak{E}$ durch

$$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_l, -\mathfrak{a}_{l+1}, \ldots, -\mathfrak{a}_n \qquad (0 \leqq l \leqq n) \tag{52}$$

geht; auch darf angenommen werden, daß

$$l \geqq \frac{n}{2} \tag{53}$$

gilt, d. h. in (52) nicht mehr $-\mathfrak{a}_i$ als $\mathfrak{a}_i$ vorhanden sind, denn sonst würde man $\mathfrak{E}$ an 0 spiegeln, wodurch kein wesentlich verschiedener Fall entsteht.

Offenbar ist $\mathfrak{E}$ durch die Punkte (52) auch schon eindeutig bestimmt und hat in Determinantenform die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x} & 1 \\ \mathfrak{a}_1 & 1 \\ \vdots & \\ \mathfrak{a}_l & 1 \\ -\mathfrak{a}_{l+1} & 1 \\ \vdots & \\ -\mathfrak{a}_n & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{54}$$

wobei $\mathfrak{x}$ den allgemeinen Punkt von $\mathfrak{E}$ bezeichnet.

Fortan soll $\mathfrak{E}$ diese Hyperebene (54) bedeuten; dann haben wir zu untersuchen, unter welcher Bedingung $\mathfrak{E}$ eine Seitenfläche von $\mathfrak{S}_0^*$ enthält. Es ist offenbar notwendig und hinreichend, daß die linke Seite von (54) für $\mathfrak{x} = \pm\,\mathfrak{a}_1, \ldots, \pm\,\mathfrak{a}_{n+1}$ keine Werte von ungleichem Vorzeichen annimmt.

Setzt man insbesondere $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_{n+1}$ und $\mathfrak{x} = -\,\mathfrak{a}_{n+1}$ in dieser Determinante ein, so darf die erste Zeile wegen (51) durch

$$0,\ 1 + (2\,l - n) \quad \text{bzw.} \quad 0,\ 1 - (2\,l - n)$$

ersetzt werden, wobei 0 beidemal den (n-dimensionalen) Nullvektor bezeichnet. Hieraus folgt nach dem Gesagten, daß

$$(1 + (2\,l - n))\,(1 - (2\,l - n)) \geqq 0$$

gelten muß. Dies ergibt $|2\,l - n| \leqq 1$, woraus nach (53) in beiden Fällen $n = 2\,k,\ 2\,k - 1$

$$l = k \tag{55}$$

folgt.

Umgekehrt, wenn dies erfüllt ist, so sieht man auch, daß unter allen $\pm\,\mathfrak{a}_i$ außer (52) nur noch $-\,\mathfrak{a}_{n+1}$, und zwar nur im Fall $n = 2\,k - 1$, in $\mathfrak{E}$ liegt, und in beiden Fällen $n = 2\,k,\ 2\,k - 1$ liegen die übrigen $\pm\,\mathfrak{a}_i$ in dem einen Halbraum von $\mathfrak{E}$. Hieraus folgt die Richtigkeit von Hilfssatz 5.

Nunmehr sind wir in der Lage, Satz 6 zu beweisen. Wegen (2) und (12) haben wir

$$V(\mathfrak{S}_0^*) = \binom{n}{k} V(\mathfrak{S}) \qquad (2\,|\,n) \tag{56}$$

bzw.

$$V(\mathfrak{S}_0^*) = \binom{n}{k-1} V(\mathfrak{S}) \qquad (2\nmid n) \tag{57}$$

zu beweisen. Wir führen die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_n \end{vmatrix} \tag{58}$$

ein. Es gilt vor allem

$$\pm\, n!\; V(\mathfrak{S}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_{n+1} - \mathfrak{a}_1 \end{vmatrix}.$$

Die Summe aller Zeilen dieser Determinante ist nach (51) gleich $-\,(n + 1)\,\mathfrak{a}_1$ und so folgt aus (58)

$$n!\,V(\mathfrak{S}) = (n+1)\,|D|\,. \tag{59}$$

Wir haben noch $V(\mathfrak{S}_0^*)$ zu berechnen, wobei wir die beiden Fälle $n = 2k$, $2k - 1$ unterscheiden müssen.

Im Fall $n = 2k$ ist nach Hilfssatz 5 jede Seitenfläche von $\mathfrak{S}_0^*$ ein ($(n-1)$-dimensionales) Simplex, wovon das eine die Ecken $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k, -\mathfrak{a}_{k+1}, \ldots, -\mathfrak{a}_{2k}$ hat. Nimmt man noch 0 als $(n+1)$-te Ecke hinzu und bildet die konvexe Hülle, so hat dieses (n-dimensionale) Simplex nach (58) das $n!$-fache Volumen $|D|$. Das gilt für alle Seitenflächen von $\mathfrak{S}_0^*$, und so gilt nach Hilfssatz 5

$$n!\,V(\mathfrak{S}_0^*) = (k+1)\binom{n+1}{k}|D|\,.$$

Hieraus und aus (59) folgt wegen $\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$ die Richtigkeit von (56).

Im Fall $n = 2k - 1$ müssen wir die Seitenflächen von $\mathfrak{S}_0^*$ in ($(n-1)$-dimensionale) Simplexe zerlegen. Eine von diesen läßt sich nach Hilfssatz 5 als konvexe Hülle ihrer $n+1$ Ecken als

$$\mathfrak{P}_{n-1} = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k, -\mathfrak{a}_{k+1}, \ldots, -\mathfrak{a}_{2k}] \tag{60}$$

angeben. Man setze

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{k}(\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_k) \tag{61}$$

und

$$\mathfrak{x}_i = \mathfrak{a}_i - \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{y}_i = -\mathfrak{a}_{i+k} - \mathfrak{c} \qquad (i = 1, \ldots, k). \tag{62}$$

Aus (60) folgt dann nach Verschiebung um $-\mathfrak{c}$:

$$-\mathfrak{c} + \mathfrak{P}_{n-1} = [\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_k]\,. \tag{63}$$

Wegen (51), (61), (62) gilt auch

$$\mathfrak{x}_1 + \cdots + \mathfrak{x}_k = 0\,, \quad \mathfrak{y}_1 + \cdots + \mathfrak{y}_k = 0\,. \tag{64}$$

Es ist auch klar, daß es zwischen den $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_k$ außer (64) keine weiteren linearen Abhängigkeiten gibt.

Betrachten wir nun einen beliebigen Punkt von (63):

$$\alpha_1\mathfrak{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathfrak{x}_k + \beta_1\mathfrak{y}_1 + \cdots + \beta_k\mathfrak{y}_k \quad (\alpha_i, \beta_i \geqq 0;\ \alpha_1 + \cdots + \beta_k = 1). \tag{65}$$

Eine unmittelbare Folgerung aus (64) ist, daß dies in ein $(n-1)$-dimensionales Simplex

$$[0, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_k]_{ij} \qquad (1 \leqq i, j \leqq k) \tag{66}$$

gehört, wobei die Indizes i, j das Streichen von $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_j$ bezeichnen. Andererseits folgt aus obiger Bemerkung über (64), daß die (66) paarweise ohne gemeinsamen ($(n-1)$-dimensionalen) inneren Punkt sind, d. h. eine simpliziale Zerlegung von (63) bilden. Nach Verschiebung um $\mathfrak{c}$ folgt dann wegen (62), daß die

$$[\mathfrak{c}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k, -\mathfrak{a}_{k+1}, \ldots, -\mathfrak{a}_{2k}]_{ij} \quad (1 \leqq i \leqq k;\ k+1 \leqq j \leqq 2k) \tag{67}$$

ebenfalls eine Zerlegung von (60) bilden (i, j bezeichnen die Streichung von $\mathfrak{a}_i$, $-\mathfrak{a}_j$). Man bilde die konvexe Hülle von (67) mit 0:

$$[0, \mathfrak{c}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k, -\mathfrak{a}_{k+1}, \ldots, -\mathfrak{a}_{2k}]_{ij} \quad (1 \leqq i \leqq k;\ k+1 \leqq j \leqq 2k)\,. \tag{68}$$

Diese (n-dimensionalen) Simplexe bilden dann eine Zerlegung von $[0, \mathfrak{P}_{n-1}]$ (der konvexen Hülle von 0 und $\mathfrak{P}_{n-1}$).

Wegen (61) ist das $n!\,k$-fache Volumen von (68) (vom Vorzeichen abgesehen) offenbar gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_{2k} \end{vmatrix}_j \qquad (k+1 \leq j \leq 2\,k),$$

wobei „j" wieder das Streichen von $\mathfrak{a}_j$ bezeichnet. Wegen (51) und (58) ist diese Determinante gleich $\pm D$. Das gilt für alle Paare i, j und so ist nach obigem

$$n!\,k\,V([0, \mathfrak{P}_{n-1}]) = k^2 D.$$

Dies gilt für alle Seitenflächen $\mathfrak{P}_{n-1}$ von $\mathfrak{S}_0^*$, und so folgt aus Hilfssatz 5:

$$n!\,k\,V(\mathfrak{S}_0^*) = \binom{n+1}{k} k^2 |D|.$$

Hieraus und aus (59) folgt wegen $\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1}$ die Richtigkeit von (57), womit wir Satz 6 bewiesen haben.

Bemerkung. Insbesondere für $n = 2$ gilt nach Satz 6 $c^*(\mathfrak{S}) = \frac{1}{2}$, d. h. $V(\mathfrak{S}^*) = 2\,V(\mathfrak{S})$. Spiegelt man andererseits (das Dreieck) $\mathfrak{S}$ an einem Seitenmittelpunkt und bildet die Vereinigungsmenge mit $\mathfrak{S}$, so entsteht ein Parallelogramm ebenfalls mit dem Flächeninhalt $2\,V(\mathfrak{S})$. Hieraus folgt, daß die drei Seitenmittelpunkte von $\mathfrak{S}$ also auch durch das sie bestimmte Dreieck zur Menge der Hüllenzentra von $\mathfrak{S}$ gehören, und somit ist diese ein konvexer Bereich mit innerem Punkt, wie wir das in der Einleitung schon erwähnt haben. (Übrigens sieht man leicht, daß das genannte Dreieck gleich der Menge der Hüllenzentra ist.)

§ 7. Beweis von (13) und (15).

Um (15) zu beweisen, wenden wir das aus der Primzahltheorie bekannte komplexe Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \frac{e^{\alpha z}}{z^{n+1}}\,dz = \begin{cases} \dfrac{\alpha^n}{n!} & (\alpha \geqq 0), \\ 0 & (\alpha \leqq 0) \end{cases}$$

an, wobei man über die Gerade $z = 1 + i\,t$ $(-\infty < t < \infty)$ zu integrieren hat. Für

$$\Omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \left(\frac{e^z - e^{-z}}{z}\right)^{n+1} dz = \sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu \binom{n+1}{\nu} \frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \frac{e^{(n+1-2\nu)z}}{z^{n+1}}\,dz$$

folgt hieraus und aus (11)

$$\Omega = \frac{1}{n!}\sum_{0 \leqq \nu \leqq \frac{n+1}{2}} (-1)^\nu \binom{n+1}{\nu} (n+1-2\,\nu)^n = \frac{(n+1)^n}{n!}\,c_*(\mathfrak{S});$$

also ist

$$c_*(\mathfrak{S}) = n!\left(\frac{2}{n+1}\right)^n \frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2z}\right)^{n+1} dz.$$

Nach CAUCHYs Satz darf der Integrationsweg in die imaginäre Achse verwandelt werden, und so erhalten wir mit der Substitution $z = i\,t$:

$$c_*(\mathfrak{S}) = n!\left(\frac{2}{n+1}\right)^n \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1} dt,$$

woraus (13) folgt.

Wir zeigen:

(69)
$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^n < \int\limits_0^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1} dt < \frac{n+1}{n}.$$

Der Integrand nimmt nämlich im Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ monoton ab, ist überall $\geqq 0$ und hat insbesondere für $t = 0, \frac{\pi}{6}$ den Wert 1 bzw. $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{n+1}$. Deshalb liegt das Integral zwischen

$$\frac{\pi}{6}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{n+1} \quad \text{und} \quad 1 + \int\limits_1^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}} = \frac{n+1}{n},$$

womit (69) bewiesen ist.

Andererseits gilt bekanntlich

(70)
$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi(n+1)}.$$

Dies und (13) ergeben

$$c_*(\mathfrak{S}) < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2}{e}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}\sqrt{n+1}.$$

Hieraus folgt (15).

Endlich wollen wir noch (14) beweisen. Aus (12), (13), (69) folgt

$$\frac{c_*(\mathfrak{S})}{c^*(\mathfrak{S})} > \binom{n}{n_0}\frac{1}{\pi}\, n!\left(\frac{2}{n+}\right)^n \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^n.$$

Bezeichnen wir die rechte Seite mit q_n. Nach der Tabelle in der Einleitung gilt (14) für $n \leqq 8$, und so genügt es, $q_n > 1$ $(n \geqq 9)$ zu beweisen. Ist k eine positive ganze Zahl, so berechnet man leicht

$$\frac{q_{2k}}{q_{2k-1}} = \frac{12}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{-2k} > \frac{12}{\pi e} > 1,$$

folglich genügt es, $q_{2k-1} > 1$ $(k \geqq 5)$ nachzuweisen. Man rechnet leicht aus:

$$q_{2k-1} = \frac{1}{24}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2k} k^{-2k}\left(\frac{(2k)!}{k!}\right)^2.$$

Der Quotient in den letzten Klammern ist nach (70) größer als

$$2^{2k} k^k e^{-k}\sqrt{2},$$

und daher gilt

$$q_{2k-1} > \frac{1}{12}\left(\frac{12}{\pi e}\right)^{2k}.$$

Hiernach gilt $q_{2k-1} > 1$ für $k \geqq 5$, womit wir (14) bewiesen haben.

(Eingegangen am 22. Dezember 1948.)

Math. Annalen, Bd. 122, S. 221—234 (1950).

Ganze transzendente Lösungen algebraischer Differentialgleichungen.

Von

Hans Wittich in Karlsruhe.

In verschiedenen Arbeiten[1]) ist die Frage untersucht worden, ob gewisse Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen ganze Lösungen zulassen. So ist zum Beispiel bekannt, daß jede ganze Lösung der Differentialgleichung $\frac{d^n w}{d z^n} = f(w), n \geq 1, f(w)$ ganz und nicht linear in w, eine Konstante ist. Für gewisse Typen algebraischer Differentialgleichungen lassen sich ohne Durchführung des Integrationsprozesses ziemlich weitgehende Aussagen über die Wachstumsordnung der ganzen transzendenten Lösungen machen. Daß solche Aussagen zu erwarten sind, liegt z. B. nach der Definition der Wachstumsordnung $\lambda \varliminf_{n \to \infty} \frac{-\log|a_n|}{n \log n} = \frac{1}{\lambda}$, a_n Koeffizienten in der Nullpunktsentwicklung der ganzen Funktion, auf der Hand. Als Beispiel einer solchen Aussage sei ein Satz von G. Pólya[2]) angeführt: Die Differentialgleichung $P(z, w, w') = 0$, P ein Polynom in z, w und w', kann nie eine ganze transzendente Funktion der Ordnung $\lambda = 0$ zur Lösung haben. Ähnliche Beiträge sollen im folgenden unter Ausnützung neuerer funktionentheoretischer Ergebnisse zusammengestellt werden.

1. Das angegebene Resultat über die möglichen ganzen Lösungen von $w^{(n)} = f(w)$ läßt sich auf die allgemeinere Differentialgleichung

$$P(z, w, w_1, \ldots, w_p) = f(w),\ p \geq 1,\ w_j = \frac{d^j w}{d z^j}, \tag{1}$$

übertragen. Es gilt der

Satz: *In* (1) *sei P ein Polynom in den angegebenen Veränderlichen und $f(w)$ eine in w ganze transzendente Funktion. Dann ist jede ganze Funktion, die der Differentialgleichung* (1) *genügt, eine Konstante.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $P(z, w, \ldots, w_p)$ von der Form $P(z, w, \ldots, w_p) = \sum\limits_{\varkappa_0 \ldots \varkappa_p} a_{\varkappa_0 \ldots \varkappa_p}(z)\, w^{\varkappa_0} w_1^{\varkappa_1} \ldots w_p^{\varkappa_p}$, wobei die Koeffizienten $a_{\varkappa_0 \ldots \varkappa_p}(z)$ Polynome in z sind. Mit $\varkappa = \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_p$ folgt aus (1)

$$|f(w)| \leq \sum |a_{\varkappa_0 \ldots \varkappa_p}(z)|\, |w|^{\varkappa_0 + \varkappa} \left|\frac{w_1}{w}\right|^{\varkappa_1} \cdots \left|\frac{w_p}{w}\right|^{\varkappa_p}$$

und nach Übergang zum Pluslogarithmus[3])

$$\overset{+}{\log}|f(w)| \leq \sum \left\{\overset{+}{\log}|a_{\varkappa_0 \ldots \varkappa_p}| + \overset{+}{\log}|w|^{\varkappa_0 + \varkappa} + \sum_{j=1}^{p} \overset{+}{\log}\left|\frac{w_j}{w}\right|^{\varkappa_j}\right\} + C_1 .$$

[1]) a) Rellich, F.: Math. Ann **117**. b) Rellich, F.: Math. Z. **47**. c) Wittich, H.: Math. Z. **47**. d) Wittich, H.: Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl. **1946**.

[2]) Pólya, G.: Acta math. **42** (1920).

[3]) Zu den hier benützten Hilfsmitteln aus der Wertverteilungslehre vgl. man R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen. Berlin: Julius Springer 1936.

Integration über $|z| = r$, $z = r e^{i\varphi}$, ergibt

$$m(r, f(w)) \leqq \sum \left\{ m(r, a_{\varkappa_0 \ldots \varkappa_p}) + m(r, w^{\varkappa_0 + \varkappa}) + \sum_{j=1}^{p} m\left(r, \left(\frac{w_j}{w}\right)^{\varkappa_j}\right) \right\} + C_1,$$

wo in bekannter Weise mit $m(r, g)$ die Schmiegungsfunktion der ganzen Funktion $w = g(z)$ bezeichnet wird. Durch Anwendung des Satzes von der Schmiegungsfunktion der logarithmischen Ableitung erhält man $\sum_{j=1}^{p} m\left(r, \left(\frac{w_j}{w}\right)^{\varkappa_j}\right) \leqq k_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} \log(r \cdot T(r, w))$; diese Abschätzung gilt für alle r, abgesehen von einer r-Menge Δ_1 von endlichem logarithmischen Maß. $T(r, g)$ ist die Charakteristik der Funktion $g(z)$. Da $m(r, a_{\varkappa_0 \ldots \varkappa_p}(z)) \leqq K_{\varkappa_0 \ldots \varkappa_p} \cdot \log r$ ist, erhält man wegen

$m(r, f(w)) = T(r, f(w)) + O(1)$ und $m(r\, w^{\varkappa_0 + \varkappa}) = (\varkappa_0 + \varkappa)\, T(r, w) + O(1)$

für alle r außerhalb Δ_1

$$T(r, f(w)) < k_1\, T(r, w) + k_2 \log(r \cdot T(r, w)), \tag{2}$$

wobei $k_1 = \Sigma(\varkappa_0 + \varkappa)$ und k_2 für gegebenes P feste positive Konstanten sind. Für die charakteristische Funktion $T(r, f(w(z)))$ gilt weiter die Abschätzung[4]) $T(r, f(w)) > k \cdot T(r, w)$; dabei kann man für k eine beliebige natürliche Zahl wählen. Diese Beziehung gilt für alle r, die nicht einer Ausnahmemenge Δ_2 von endlichem linearen Maß angehören. Danach gilt

$$k\, T(r, w) < k_1\, T(r, w) + k_2 (\log r \cdot T(r, w))$$

sicher für eine Folge $r_1, r_2, \ldots, r_\mu, \ldots, r_\mu \to \infty$, von r-Werten, was bei der Wahl $k > k_1 + k_2$ nicht möglich ist, weil $T(r, w)$ mindestens wie $O(\log r)$ wächst. Daß Polynomlösungen nicht möglich sind, ersieht man sofort aus (1). Daher muß sich jede ganze Lösung von (1) auf eine Konstante reduzieren.

Ist $f(w)$ ein Polynom, so liegt eine algebraische Differentialgleichung $Q(z, w_0, w_1, \ldots, w_p) = 0$ vor; dieser Fall wird später erörtert. Sind in $P(z, \ldots, w_p)$ die Koeffizienten $a_{\varkappa_0 \ldots \varkappa_p}(z)$ allgemeiner ganze transzendente Funktionen von z, so kann man aus

$$T(r, f(w)) < k_1\, T(r, w) + \Sigma\, m(r, a_{\varkappa_0 \ldots \varkappa_p}(z)) + k_3 \log(r \cdot T(r, w)) \tag{2'}$$

in manchen Fällen Aussagen über das Anwachsen ganzer Lösungen von (1) gewinnen.

Es seien z. B. die Koeffizienten $a_{\varkappa_0 \ldots \varkappa_p}(z)$ ganze transzendente Funktionen von endlicher Ordnung und $f(w)$ eine in w ganze transzendente Funktion von positiver Ordnung. Unter diesen Annahmen läßt (1) keine ganze Lösung von endlicher Ordnung zu.

Sei nämlich im Gegensatz zu der Behauptung $w = w(z)$ von endlicher Ordnung λ. Dann gilt für alle r

$$T(r, f(w)) < k_1\, T(r, w) + k_2\, T(r, a(z)) + k_3 \log r,$$

wobei $a(z)$ derjenige der endlich vielen Koeffizienten $a_{\varkappa_0 \ldots \varkappa_p}(z)$ ist, dessen Ordnung α am größten ist. Mithin ist für alle $r > r(\varepsilon)$

[4]) WITTICH, H.: l. c. [1]) c).

(3) $\log T(r, f(w)) < (\lambda + \alpha + \varepsilon) \log r$ oder $\dfrac{\log T(r, f(w))}{\log r} < \lambda + \alpha + \varepsilon < \infty$

erfüllt. Da $f(w)$ von positiver Ordnung ist, muß die ganze transzendente Funktion $F(z) = f(w(z))$ von unendlichem Wachstum sein, was der abgeleiteten Beziehung (3) widerspricht. Die Annahme $0 \leqq \lambda < \infty$ ist also nicht zulässig. Ist ϱ die Ordnung von $f(w)$, so wird der Grad m der möglichen Polynomlösungen $P_m(z) = w$ durch die Bedingung $\varrho \cdot m \leqq \alpha$ eingeschränkt. Im Falle $\varrho = 0$ kann die Annahme einer ganzen transzendenten Lösung von endlicher Ordnung λ mit (3) verträglich sein. Gilt z. B. mit Max $|f(w)| = F(|w|) \log F(|w|) \sim (\log |w|)^n$, $n > 1$, so erhält man wegen $\overline{\lim\limits_{r \to \infty}} \dfrac{\log T(r, f(w))}{\log r} = n \cdot \lambda$ aus (3) $n\lambda \leqq \lambda + \alpha$ oder $\lambda \leqq \dfrac{\alpha}{n-1}$, also eine Wachstumsbeschränkung für die Lösung $w(z)$, falls überhaupt eine ganze transzendente Lösung vorhanden ist.

Der eingangs ausgesprochene Satz zeigt, daß eine in $|z - z_0| < r$ eindeutige regulär analytische Lösung $w(z)$ von (1) nicht in $|z| < \infty$ mit dem Charakter einer ganzen transzendenten Funktion analytisch fortgesetzt werden kann; man stößt beim Fortsetzungsprozeß notwendig auf singuläre Stellen der Funktion $w = w(z)$.

2. Bei algebraischen Differentialgleichungen lassen sich weitergehende Aussagen über ganze transzendente Lösungen machen, wenn man Hilfsmittel von A. Wiman[5]) und G. Valiron[6]) heranzieht. In der beständig konvergenten Potenzreihe $w(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ gibt es zu jedem festen $r = |z|$ wegen $c_\nu z^\nu \to 0$ bei $\nu \to \infty$ mindestens ein Reihenglied mit größtem absoluten Betrag $\mu(r) = |c_{\nu(r)}| r^{\nu(r)}$. Gibt es mehrere solcher Glieder, so wird dasjenige mit dem größten Index $n(r) = \nu(r)$, dem Zentralindex, ausgewählt. Für ein Polynom $P_n(z)$ ist von einem gewissen r an der Zentralindex $n(r)$ konstant und gleich dem Grad des Polynoms, und umgekehrt folgt aus $n(r) = n$ für alle $r \geqq r_0$, daß $w = g(z)$ ein Polynom $P_n(z)$ ist. Bezeichnet ζ auf $|z| = r$ eine Stelle, an der das Maximum von $|P(z)|$ angenommen wird, so gilt

(4) $P'(\zeta) = \dfrac{n}{\zeta} P(\zeta)(1 + \varepsilon_1(\zeta))$, $\quad P''(\zeta) = \dfrac{n(n-1)}{\zeta^2} P(\zeta)(1 + \varepsilon_2(\zeta)), \ldots$

mit $\varepsilon_j(\zeta) \to 0$ bei $|\zeta| \to \infty$.

Es soll nun festgestellt werden, ob die Differentialgleichung $(z^2 - 1) w'' + 2 z w' - \lambda w = 0$ Polynomlösungen zuläßt. Mit (4) erhält man aus der Differentialgleichung $n(n-1)(1 + \varepsilon_1) + 2n(1 + \varepsilon_2) - \lambda = 0$, $\varepsilon_j \to 0$. Es sind also nur für $\lambda = n(n+1)$ Polynomlösungen möglich. Die Differentialgleichung hat auch genau für diese λ Polynome zu Lösungen, nämlich die Legendreschen Polynome. Entsprechend findet man für die Differentialgleichung $w'' - 2zw' + \lambda w = 0$ von Hermite: $n = \dfrac{\lambda}{2}$. Aus der Annahme, daß Polynomlösungen existieren, erhält man also Aussagen über den Grad der Polynome. Im transzendenten Falle wird man entsprechende Aussagen über den Zentralindex und damit auch über die Wachstumsordnung λ der ganzen transzendenten Lösungen erwarten können, falls man auf (4) entsprechende Relationen zurückgreifen kann.

[5]) Wiman, A.: Acta math. 41 (1916).

[6]) Valiron, G.: Lectures on the general theory of integral functions. Toulouse 1923.

Für ganze transzendente Funktionen gilt[7]) mit $M(r) = \operatorname{Max}_{|z|=r} |w(z)|$:

α) Ist für $z = \zeta$ auf $|z| = r$ $M(r) = |w(\zeta)|$ erfüllt, so gilt

$$w_j(\zeta) = \left(\frac{n(r)}{\zeta}\right)^j \cdot w(\zeta)(1 + \theta_j(\zeta)),$$

$j = 1, 2, \ldots$ und $\lim_{r\to\infty} \theta_j(\zeta) = 0$, gültig für alle Werte r, abgesehen von einer Menge Δ_j, deren logarithmisches Maß endlich ist.

β) Bedeutet ε eine feste positive Größe, dann gilt für alle r außerhalb Δ (endl. log. Maß)

$$n(r) < (\log \mu(r))^{1+\varepsilon} < (\log M(r))^{1+\varepsilon}.$$

γ) Außerhalb Δ gilt

$$M(r) < \mu(r)\,(\log \mu(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

ε eine feste positive Größe.

α) entspricht der Aussage (4) bei Polynomen. Wegen $n(r) \to \infty$ sind zusätzliche Beziehungen zwischen $n(r)$, $\mu(r)$, $M(r)$ erforderlich, die durch β) und γ) gegeben werden.

In der algebraischen Differentialgleichung

$$P(z, w_1, \ldots, w_p) = 0 \tag{5}$$

bezeichne $\varkappa = \varkappa_0 + \cdots + \varkappa_p$ die Dimension und $\bar{\varkappa} = \varkappa_1 + 2\varkappa_1 + \cdots + p\,\varkappa_p$ das Gewicht des Potenzproduktes $a_{\varkappa_0 \ldots \varkappa_p}(z)\, w^{\varkappa_0} \ldots w_p^{\varkappa_p}$. Falls (5) eine ganze transzendente Lösung zuläßt, kann man nach α) $w_1(\zeta), \ldots, w_p(\zeta)$ durch $w(\zeta)$ und den Zentralindex $n(r)$ ersetzen, falls nur $r = |\zeta|$ außerhalb einer Ausnahmemenge Δ von endlichem logarithmischen Maß liegt. Das Maximum der endlich vielen Zahlen $\varkappa$ sei d, und in (5) gebe es genau ein Potenzprodukt mit maximaler Dimension d. Nach α) und β) erhält man dann aus (5) eine Beziehung der Form $1 + \varepsilon(\zeta) = 0$, die für alle zulässigen ζ mit hinreichend großem Betrag erfüllt sein muß, was wegen $\varepsilon(\zeta) \to 0$ unmöglich ist. Eine algebraische Differentialgleichung mit nur einem Glied von maximaler Dimension läßt also keine ganze transzendente Lösung zu. Dagegen sind Polynomlösungen möglich, wie die Differentialgleichung $w' - w^2 + z^2 w - 2z = 0$ mit der Lösung $w = z^2$ zeigt. Die Differentialgleichung (1) läßt, falls $f(w)$ ein Polynom in w vom Grade $m > d$ ist, keine ganze transzendente Lösung zu, weil in $P(z, w, \ldots, w_p) = f(w)$ dann eine algebraische Differentialgleichung $Q(z, w, w_1, \ldots, w_p) = 0$ mit nur einem Glied der maximalen Dimension m vorliegt. Nach PAINLEVÉ sind die Lösungen der Differentialgleichungen $w'' = 6w^2 + z$, $w'' = 2w^3 + 2w + a$ in $|z| < \infty$ eindeutige analytische Funktionen, die, da nur ein Glied mit maximaler Dimension vorkommt, gebrochene (d. s. in $|z| < \infty$ meromorphe) Funktionen sein müssen.

Haben in (5) mehrere Potenzprodukte die maximale Dimension d, so seien die zugehörigen Gewichte $\gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \cdots \leqq \gamma_\mu$ und die entsprechenden Koeffizienten $a_1(z), \ldots, a_\mu(z)$. Ersetzt man dann die Ableitungen nach α) und dividiert mit $w^d(\zeta)$, so erhält man wegen $d - \varkappa \geqq 1$ aus (5)

$$\sum_{j=1}^{\mu} a_j(\zeta)\left(\frac{n(r)}{\zeta}\right)^{\gamma_j}(1 + \varepsilon_j(\zeta)) = 0. \tag{5'}$$

[7]) VALIRON, G.: l. c. 6).

Die verschiedenen Gewichte seien $g_1 = \gamma_1 < g_2 < \cdots < g_m = \gamma_\mu$. Im folgenden werden nur solche algebraischen Differentialgleichungen betrachtet, bei denen man durch Zusammenfassung der Glieder mit gleichen Potenzen von $\frac{n(r)}{\zeta}$ einen Ausdruck der Form

$$\sum_{j=1}^{m} c_j(\zeta)\left(\frac{n(r)}{\zeta}\right)^{g_j}(1+\varepsilon_j(\zeta)) = 0 \tag{6}$$

bekommt.

Für $(z+1)\,w_2 w + z w_1^2 + w - 1 = 0$ erhält man

$$(\zeta+1)\left(\frac{n}{\zeta}\right)^2(1+\varepsilon_1) + \zeta\left(\frac{n}{\zeta}\right)^2(1+\varepsilon_2) + \frac{w(\zeta)-1}{w^2(\zeta)} =$$
$$= \zeta\left(\frac{n}{\zeta}\right)^2\left\{\left(1+\frac{1}{\zeta}\right)(1+\varepsilon_1) + 1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right\} = 2\,\zeta\cdot\left(\frac{n}{\zeta}\right)^2(1+\varepsilon(\zeta)) = 0$$

mit $\varepsilon(\zeta) \to 0$ bei $|\zeta| \to \infty$.

Im Falle $(z+1)\,w_2 w - z w_1^2 + w - 1 = 0$ ist wegen

$$\zeta\left(\frac{n}{\zeta}\right)^2\left\{\left(1+\frac{1}{\zeta}\right)(1+\varepsilon_2) - 1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right\} = \zeta\cdot\left(\frac{n}{\zeta}\right)^2\cdot\varepsilon(\zeta) = 0$$

die Reduktion auf (6) nicht möglich. Dasselbe gilt für $w_2 w - w_1^2 + 1 = 0$ mit dem partikulären Integral $w(z) = \sin(z+c)$. Algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung und lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten lassen sich stets auf die Form (6) bringen.

Es sei nun in (6) $c_j(\zeta) = C_j\,\zeta^{k_j}(1+\theta_j(\zeta))$; mit $\zeta = \frac{1}{x}$, $n = \frac{1}{y}$, $k = \operatorname{Max}_{j=1}^{m} k_j$ erhält man

$$\sum_{j=1}^{m} C_j\, x^{k-k_j+g_j}\, y^{g_m-g_j}(1+\varepsilon_j(x)) = 0, \quad \varepsilon_j(x) \to 0 \text{ bei } x \to 0. \tag{$\bar{6}$}$$

Für $\varepsilon_j(x) \equiv 0$ wird durch $(\bar{6})$ eine algebraische Funktion definiert; da $w(z)$ eine ganze transzendente Lösung sein soll und für solche $n(r) \to \infty$ gilt, kommen hier nur diejenigen Zweige in Frage, die $y(x) \to 0$ bei $x \to 0$ erfüllen, also Lösungen von der Form $y(x) = a_1 x^{s/q} + \ldots$, $q \leqq g_m$ und s natürliche Zahlen. Nach G. VALIRON[8]) charakterisieren diese Lösungen auch die Lösungen von $(\bar{6})$ bei $\varepsilon_j(x) \not\equiv 0$ schon vollständig, und zwar in dem Sinne, daß $y(x) = a_1 x^{s/q}(1+h(x))$ gilt, $h(x) \to 0$ bei $x \to 0$. Daraus folgt $n(r) = A_1 \zeta^{s/q}(1+H(\zeta))$ und $\log M(r) \sim A r^{s/q}$, $0 < A < \infty$. Die Funktionen $w = w(z)$ sind also von regulärem Wachstum und vom Mitteltypus der rationalen Ordnung $\lambda = \frac{s}{q} \geq \frac{1}{g_m}$. Falls (5) eine ganze transzendente Lösung besitzt und die Reduktion auf (6) möglich ist, kann man also nicht nur die Ordnung der Lösung abschätzen, sondern auch noch Aussagen über $n(r)$ und die Lage der Stellen ζ machen, für die $M(r) = |w(\zeta)|$ gilt. Ist die Umformung in (6) nicht möglich, dann gelten die angegebenen Eigenschaften i. a. nicht mehr, wie etwa die Differentialgleichung $w_2^2 w^2 - 2\,w_2 w_1^2 w + w_1^4 + w_1^2 w^2 - w^4 = 0$ mit der partikulären Lösung $w = e^{\sin z}$ $(\lambda = \infty)$ zeigt.

Aus (6) gewinnt man den

Satz: *Die algebraische Differentialgleichung $P(z, w, \ldots, w_p) = 0$ besitze eine ganze transzendente Lösung und gestatte, wenn man die Ableitungen nach α) ersetzt, die Darstellung*

[8]) VALIRON, G.: l. c. 6).

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \zeta^{q_j}\left(\frac{n(r)}{\zeta}\right)^{g_j}(1+\varepsilon_j(\zeta))=0\,,\quad g_1<g_2<\cdots<g_m\,.$$

Dann gilt für die Wachstumsordnung die Abschätzung:

$$\operatorname{Max}\left(\frac{1}{g_m},\,1-M_1\right)\leqq\lambda\leqq 1+M_2\,.$$

Dabei ist $M_1=\operatorname*{Max}\limits_{j=2}^{m}\left(0,\frac{q_j-q_1}{g_j-g_1}\right)$ *und* $M_2=\operatorname*{Max}\limits_{j=1}^{m-1}\left(0,\frac{q_j-q_m}{g_m-g_j}\right)$. *Die Schranken für* λ *können erreicht werden.*

Nach Voraussetzung ist $w=w(z)$ von regulärem Wachstum, erfüllt also $n(r)=A\,r^{\lambda}(1+\theta(r))$, $\theta(r)\to 0$ bei $r\to\infty$. Schreibt man (6) in der Form

$$c_m\zeta^{q_m}\left(\frac{n}{\zeta}\right)^{g_m}(1+\varepsilon_m)\left\{1+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{c_j}{c_m}\zeta^{q_j-q_m}\left(\frac{n}{\zeta}\right)^{g_j-g_m}\cdot\frac{1+\varepsilon_j}{1+\varepsilon_m}\right\}=0\,,$$

so gilt für die Summanden in der Klammer bei hinreichend großem zulässigem ζ

$$\left|\frac{c_j}{c_m}\zeta^{q_j-q_m}\left(\frac{n}{\zeta}\right)^{g_j-g_m}\cdot\frac{1+\varepsilon_j}{1+\varepsilon_m}\right|\leqq K\cdot r^{q_j-q_m}\cdot r^{\lambda(g_j-g_m)},\qquad j=1,2,\ldots,m-1.$$

Wegen $q_j-q_m\leqq M_2(g_m-g_j)$ erhält man bei der Annahme $\lambda>1+M_2$

$$q_j-q_m-(\lambda-1)(g_m-g_j)<M_2(g_m-g_j)-M_2(g_m-g_j)=0\,,$$

also $\left|\frac{c_j}{c_m}\zeta^{q_j-q_m}\left(\frac{n}{\zeta}\right)^{g_j-g_m}\cdot\frac{1+\varepsilon_j}{1+\varepsilon_m}\right|\to 0$ bei $|\zeta|\to\infty$ oder

$$c_m\zeta^{q_m}\left(\frac{n}{\zeta}\right)^{g_m}(1+\varepsilon(\zeta))=0\,,$$

was wegen $\varepsilon(\zeta)\to 0$ unmöglich ist. Es muß also $\lambda\leqq 1+M_2$ sein. Zum Beweis der zweiten Behauptung wird geschrieben

$$c_1\zeta^{q_1}\left(\frac{n}{\zeta}\right)^{g_1}(1+\varepsilon_1)\left\{1+\sum_{j=2}^{m}\frac{c_j}{c_1}\zeta^{q_j-q_1}\left(\frac{n}{\zeta}\right)^{g_j-g_1}\cdot\frac{1+\varepsilon_j}{1+\varepsilon_1}\right\}=0\,.$$

Da $\lambda\geqq\frac{1}{g_m}$ gilt, darf man sich auf $1-M_1>\frac{1}{g_m}$ beschränken.

Es sei entgegen der Behauptung $\lambda<1-M_1$. Dann gilt für alle hinreichend großen zulässigen ζ

$$\left|\frac{c_j}{c_1}\zeta^{q_j-q_1}\left(\frac{n}{\zeta}\right)^{g_j-g_1}\frac{1+\varepsilon_j}{1+\varepsilon_1}\right|\leqq K\,r^{(g_j-g_1)M_1+(\lambda-1)(g_j-g_1)}=K\,r^{(g_j-g_1)(M_1+\lambda-1)}$$

$\to 0$ bei $r\to\infty$, was nicht möglich ist. Es muß also $\lambda\geqq\operatorname{Max}\left(\frac{1}{g_m},\,1-M_1\right)$ gelten, wie behauptet wurde.

Für die Differentialgleichung $(2z-1)\,w_2-(4z^2+1)\,w_1+(4z^2-2z+2)\,w=0$ ist $d=1$

$$q_1=2,\quad q_2=2,\quad q_3=1$$

$$g_1=0,\quad g_2=1,\quad g_3=2,\qquad \text{also } M_2=1,\ M_1=0,$$

d. h.

$$\operatorname{Max}\left(\frac{1}{2},\,1\right)=1\leqq\lambda\leqq 2\,.$$

Das allgemeine Integral lautet $w(z)=C_1\exp z+C_2\exp z^2$. Die Schranken werden erreicht. Für $z^{p-1}w_p+A_1z^{p-2}w_{p-1}+\cdots+A_{p-1}w_1-w=0$ ist

$\frac{1}{q_m} = 1 - M_1 = \frac{1}{p}$; nach G. Pólya[9]) hat diese Differentialgleichung eine ganze transzendente Lösung der Ordnung $\lambda = \frac{1}{p}$.

Gilt für $j = 1, 2 \ldots, m-1$ stets $q_j \leqq q_m$, so ist $M_2 = 0$, also $\lambda \leqq 1$. Diese Folgerung enthält einen

Satz von Perron: *Sind die Koeffizienten $a_j(z), j = 0, 1 \ldots p+1$, einer linearen Differentialgleichung*

$$\sum_{\mu=0}^{p} a_\mu(z)\, w_{p-\mu}(z) + a_{p+1}(z) = 0$$

Polynome, die $a_j(z)$, $j = 0, \ldots, p$, höchstens vom Grade s und speziell $a_0(z)$ genau vom s-ten Grade, so ist für jede ganze transzendente Funktion, die der Differentialgleichung genügt, die Ordnung $\lambda \leqq 1$.

Sind alle $q_j = 0$, kommt also in der Differentialgleichung z überhaupt nicht vor, so ist $\lambda = 1$. Das Briot-Bouquetsche Ergebnis über $P(w, w') = 0$ gilt also auch noch bei dieser Klasse von Differentialgleichungen für $p \geqq 2$. Wie wesentlich die Voraussetzung über die Möglichkeit der Umformung von (5) in (6) ist, zeigt das Beispiel auf Seite 225. In der Differentialgleichung kommt z nicht vor; für die Lösung $w = e^{\sin z}$ ist aber $\lambda = \infty$.

Für ganze transzendente Funktionen $w = w(z)$, die einer algebraischen Differentialgleichung der angegebenen Klasse genügen, ergeben sich also aus (6) Aussagen über $n(r)$ und ζ in folgendem Sinne. Man erhält aus (6) eine Anzahl von Lösungen der Form $n(r) = A\, \zeta^{s/q}(1 + H(\zeta))$, also $n(r) = |A|\, r^{s/q}(1 + h(r))$ und $\arg \zeta = (2\pi j - \arg A)\frac{q}{s} + \varepsilon(\zeta)$, $j = 0, 1, \ldots, (s-1)$. Nur diese Größen sind für Lösungen der Form $w = w(z)$ zulässig. Es braucht aber nicht umgekehrt zu jeder zulässigen Lösung von (6) (bzw. $(\bar{6})$) eine ganze transzendente Lösung der Differentialgleichung mit diesem charakteristischen Verhalten zu existieren. Ist die Differentialgleichung $w'' - 4zw' + (4z^2 - 2)w = 0$ vorgelegt, so gibt es eine zulässige Lösung von (6)

$$n(r) = 2\zeta^2(1 + H(\zeta))$$
$$n(r) = 2r^2(1 + h(r)),$$
$$\arg \zeta = 0, \pi + \varepsilon(\zeta).$$

Aus dem allgemeinen Integral der Differentialgleichung $w(z) = (C_1 + C_2 z)\, e^{z^2}$ erkennt man, daß für jede Lösung $\arg \zeta = 0, \pi + \varepsilon(\zeta)$ gilt.

Aus $w'' - z w' - z^2 w = 0$ findet man

$$n(r) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} r^2(1 + h(r)) \qquad\qquad n(r) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r^2(1 + h(r))$$

und

$$\arg \zeta = 0, \pi + \varepsilon(\zeta) \qquad\qquad \arg \zeta = \pm \frac{\pi}{2} + \varepsilon(\zeta).$$

A. Wiman[10]) stellte die Frage, ob es ein partikuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung gibt, für welches $\log M(r) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} r^2(1 + \varepsilon(r))$ in den asymptotischen Richtungen $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ gilt. Um diese Frage zu ent-

[9]) Pólya, G.: Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **61** (1916).
[10]) Wiman, A.: l. c. 5).

scheiden, wird durch die Substitution $x = \beta z^2$, $w(z) = e^{\alpha x} y(x)$ mit $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 1\right)$ und $\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ die gegebene Differentialgleichung in die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung

$$x y'' + (c - x) y' - a y = 0, \quad a = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad c = \frac{1}{2}$$

übergeführt. Diese besitzt zwei linear unabhängige Lösungen $\overset{\circ}{y}_1(x)$, $\overset{\circ}{y}_2(x)$ der Form

$$\overset{\circ}{y}_1(x) = {}_1F_1(a, c, x), \quad \overset{\circ}{y}_2(x) = x^{1-c}\, {}_1F_1(a - c + 1, 2 - c, x)$$

und zwei linear unabhängige Lösungen $\overset{\infty}{y}_1(x)$, $\overset{\infty}{y}_2(x)$, die in $-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$ die asymptotischen Entwicklungen zulassen

$$\overset{\infty}{y}_1(x) \sim x^{-a} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (a - c + 1)_j}{j!} (-x)^{-j}$$

$$\overset{\infty}{y}_2(x) \sim e^x x^{a-c} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(c - a)_j (1 - a)_j}{j!} x^{-j}.$$

Zwischen den Fundamentalsystemen $\overset{\circ}{y}_j(x)$, $\overset{\infty}{y}_j(x)$ besteht eine Beziehung der Form

$$\overset{\circ}{y}_1(x) = c_{11} \overset{\infty}{y}_1(x) + c_{12} \overset{\infty}{y}_2(x)$$

$$\overset{\circ}{y}_2(x) = c_{21} \overset{\infty}{y}_1(x) + c_{22} \overset{\infty}{y}_2(x).$$

Dabei sind die c_{jk} und $c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}$ für die angegebenen Zahlen a und c sämtlich von Null verschiedene endliche Zahlen. Übergang zu den Veränderlichen z, w ergibt

$$\overset{\circ}{w}(z) = c_{j1} \overset{\infty}{w}_1(z) + c_{j2} \overset{\infty}{w}_2(z), \qquad j = 1, 2,$$

wobei nun in $-\frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}$ gilt

$$\overset{\infty}{w}_1(z) \sim e^{-\frac{\sqrt{5}-1}{4} z^2} (\beta z^2)^{-a} \{1 + \cdots\}$$

$$\overset{\infty}{w}_2(z) \sim e^{+\frac{\sqrt{5}+1}{4} z^2} (\beta z^2)^{a-c} \{1 + \cdots\}.$$

Das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung ist von der Form $w(z) = d_1 \overset{\circ}{w}_1(z) + d_2 \overset{\circ}{w}_2(z)$. Es sei nun $w(z) = d_1 \overset{\circ}{w}_1(z) + d_2 \overset{\circ}{w}_2(z)$ eine Lösung der Differentialgleichung, die in den asymptotischen Richtungen $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ das Verhalten $\log M(r) \sim \frac{\sqrt{5} - 1}{4} r^2$ zeigt. Nach den Umsetzungsformeln $\overset{\circ}{w}_1(e^{i\pi} z) = \overset{\circ}{w}_1(z)$, $\overset{\circ}{w}_2(e^{i\pi} z) = e^{i\pi} \overset{\circ}{w}_2(z)$ gilt $w(-r) = d_1 \overset{\circ}{w}_1(r) - d_2 \overset{\circ}{w}_2(r)$. Aus $w(r) = (d_1 c_{11} + d_2 c_{21}) \overset{\infty}{w}_1(r) + (d_1 c_{12} + d_2 c_{22}) \overset{\infty}{w}_2(r)$ folgt $d_1 c_{12} + d_2 c_{22} = 0$, weil sonst $w(z)$ für $\varphi = 0$ das Verhalten $\log M(r) \sim \frac{\sqrt{5} + 1}{4} r^2$ aufweisen würde, im Gegensatz zur Annahme. Wegen $w(-r) = (d_1 c_{11} - d_2 c_{21}) \overset{\infty}{w}_1(r) + (d_1 c_{12} - d_2 c_{22}) \overset{\infty}{w}_2(r)$ muß auch $d_1 c_{12} - d_2 c_{22} = 0$ sein, weil sonst für $\varphi = \pi$ $\log M(r) \sim \frac{\sqrt{5} + 1}{4} r^2$ gelten würde. Da alle c_{jk} und $c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} \neq 0$ sind, folgt $d_1 = d_2 = 0$. Es gibt also keine nichttriviale Lösung $w(z) = d_1 \overset{\circ}{w}_1(z) + d_2 \overset{\circ}{w}_2(z)$ mit den geforderten Eigenschaften. Zu einer Lösung von (6) braucht also nicht immer eine Lösung der Differentialgleichung zu gehören.

3. Für lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten ist die Umformung in $(\bar{6})$ stets möglich und führt zu

$$\sum_{j=0}^{p} c_j\, x^{p-j+k-k_j}\, y^j\,(1+\theta_j(x)) = 0; \tag{7}$$

zur Bestimmung der Lösungen $y(x)$ mit $y(x) = C\,x^\lambda\,(1+\varepsilon(x))$ dient die Gleichung

$$\sum_{j=0}^{p} c_j\, x^{p-j+k-k_j}\, y^j = \sum_{j=0}^{p} c_j\, x^{\alpha_j}\, y^j = 0\,, \alpha_j = p - j + k - k_j\,. \tag{7'}$$

Liegen die Punkte $S_j = (j, \alpha_j)$ im Puiseux-Diagramm nicht unterhalb der durch S_0, S_p bestimmten Geraden $\mathfrak{g}$, so ist $\lambda = \frac{\alpha_0 - \alpha_p}{p} = 1 + \frac{k_p - k_0}{p}$. Das ist sicher der Fall, wenn $p\,(k_j - k_0) \leqq j\,(k_p - k_0)$ für $j = 0, 1 \ldots, p$ erfüllt ist. Bei $k_j \leqq k_0$ gilt $\lambda \leqq 1$, also das Resultat von O. Perron, und für $k_p = k_0$, $k_j \leqq k_0$ ist $\lambda = 1$. Sind also in einer linearen Differentialgleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten vom Grade höchstens s die Koeffizienten bei der o-ten und p-ten Ableitung genau gleich s, so haben die möglichen ganzen transzendenten Lösungen die Ordnung $\lambda = 1$.

$zw'' - (z+1)\,w' - 2\,(z-1)\,w = 0$: $\lambda = 1$, $w(z) = C_1\,e^{2z} + C_2\,(3\,z+1)\,e^{-z}$. $zw'' + w' - w = 0$. Die Bedingungen des Perronschen Satzes sind erfüllt. Ein Partikulärintegral ist

$$w(z) = \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{z}{n!}\right)^{2n} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{1}{2}\,.$$

Für $k_0 = 0$ hat die Differentialgleichung nur ganze Lösungen. Sind noch die obigen Bedingungen erfüllt, so müssen alle $k_j = 0$ sein, d. h. es liegt eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten vor, deren transzendente Lösung alle vom Normaltypus der Ordnung 1 sind. Ist $k_p > k_0$ und $p\,(k_j - k_0) \leqq j\,(k_p - k_0)$, so muß wegen $k = k_p\,\lambda > 1$ sein. Das ist z. B. für $k_j \leqq k_0$, $j = 0, 1, \ldots, p-1$ erfüllt. In $zw'' - w + 4\,z^3\,w = 0$ sind die Bedingungen erfüllt; wegen $w(z) = C_1 \cos(z^2 + C_2)$ ist $\lambda = 2$. Für lineare Differentialgleichungen lautet in der angegebenen Bezeichnung die Abschätzung für die Ordnung

$$\operatorname{Max}\left(\frac{1}{p}, 1 - M_1\right) \leqq \lambda \leqq 1 + M_2$$

mit $M_1 = \operatorname*{Max}_{j=1}^{p}\left(0, \frac{k_{p-j} - k_p}{j}\right)$ und $M_2 = \operatorname*{Max}_{j=0}^{p-1}\left(0, \frac{k_{p-j} - k_0}{p-j}\right)$. Ist $k_p \geqq k_{p-j}$ für $1 \leqq j \leqq p$ und $k_{p-j} \geqq k_0$ für mindestens ein $0 \leqq j \leqq p$, so erhält man

$$1 \leqq \lambda \leqq 1 + \operatorname*{Max}_{j=0}^{p-1} \frac{k_{p-j} - k_0}{p-j} = 1 + \varrho$$

(= Rang der Differentialgleichung), eine Abschätzung, die beim Lösungsansatz in Gestalt einer Thoméschen Normalreihe eine Rolle spielt. In der Differentialgleichung $a(z)\,w^{(p+1)} + a_p(z)\,w^{(p)} + a_{p-1}(z)\,w^{(p-1)} + \cdots + a_1(z)\,w' + a_0(z)\,w = 0$ sei der Grad von $a(z)$ genau p, und der Grad k_j von $a_j(z)$ genüge der Bedingung $k_j \leqq j$. Ist für alle $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ $g_0(\nu) = a_0(\nu) + \binom{\nu}{1} a_1'(\nu) + \cdots + \binom{\nu}{p} a_p^{(p)}(\nu) \neq 0$, so hat nach O. Perron die angegebene Differentialgleichung genau eine ganze transzendente Lösung. Ist $a_{p-m}(z)$ das letzte unter den Polynomen $a_0(z)$, $a_1(z), \ldots, a_p(z)$, für welches

$k_{p-m} = p - m$ gilt, dann folgt aus dem Puiseux-Diagramm, daß diese ganze transzendente Lösung die Ordnung $\lambda = \frac{1}{m+1}$ hat. Ist $k_j < j$ für $j = 1, 2, \ldots, p$, so ist $g_0(\nu) \neq 0$. Jede solche Differentialgleichung hat also genau eine ganze transzendente Lösung der Ordnung $\lambda = \frac{1}{p+1}$, also von der überhaupt kleinstmöglichen Ordnung. (Man vgl. das auf S. 227 erwähnte Beispiel von G. PÓLYA.)

Für $w'' + c_1(z)\,w' + c_2(z)\,w = 0$ mit $c_1(z) = C_1 z^{k_1} + \ldots, c_2(z) = C_2 z^{k_2} + \cdots$ gewinnt man aus

$$x^{2+k} + C_1\, x^{1+k-k_1}\, y + C_2\, x^{k-k_2}\, y^2 = 0$$

folgende Aussagen über die Lösungen:

1) $k_1 > k_2$. Nur Lösungen mit $\lambda = 1 + k$ möglich. Z. B. hat jede Lösung der Weberschen Differentialgleichung $zw'' - w' - aw = 0$ die Ordnung $\lambda = 2$ $(k = 1)$.

2) $k_1 = k_2 = k$. Für $k = 0$ ist $\lambda = 1$ und für $k \geqq 1$ sind $\lambda = 1 + k$ und $\lambda = 1$ möglich. Das allgemeine Integral $w(z) = C_1 e^z + C_2 e^z \int \exp\left(\frac{z^2}{2} - 2z\right) dz$ von $w'' - zw' + (z-1)\,w = 0$ zeigt, daß $\lambda = 1$ $(C_2 = 0)$ und $\lambda = 1 + k = 2$ $(C_2 \neq 0)$ zutreffen können.

3) $k_1 < k_2 = k$: a) $k - k_1 \geqq \frac{k}{2}$; Ordnung $\lambda = 1 + \frac{k}{2}$ möglich. b) $k - k_1 < \frac{k}{2}$; Ordnung $\lambda = 1 + k_1$ und $\lambda = 1 + k - k_1 = 1 + k_2 - k_1$ möglich.

Für $w'' + 4\,z\,w + (4\,z^2 + 2)\,w = 0$ mit $w(z) = e^{-z^2}(C_1 + C_2\,z)$ liegt der Fall 3a) vor. Es ist $\lambda = 2$. In $w'' - (z^3 + z^2)\,w' + (z^5 - 2\,z)\,w = 0$ ist $k_1 = 3 < k_2 = k = 5$, und $k - k_1 = 2 < \frac{k}{2} = \frac{5}{2}$. Zulässige Ordnungen sind also $\lambda = 1 + k_1 = 4$ und $\lambda = 1 + k - k_1 = 3$. Aus dem allgemeinen Integral $w(z) = \exp\frac{z^3}{3}\left[C_1 + C_2 \int \exp\left(\frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3}\right) dz\right]$ ist zu ersehen, daß beide Fälle tatsächlich zutreffen können.

Eine Diskussion der Differentialgleichung $w'' + c_1(z)\,w' + c_2(z)\,w = 0$ unter Beachtung der hier besonders interessierenden Gesichtspunkte ist unter Anwendung von asymptotischen Integrationen möglich.

In der Differentialgleichung $w^{(p)} + a_1(z)\,w^{(p-1)} + a_p(z)\,w = 0$ seien die Koeffizienten ganze Funktionen. Es existiere ein Fundamentalsystem $w_1(z), \ldots, w_p(z)$ mit endlichen Ordnungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$. Dann müssen die Koeffizienten $a_1(z)$, $a_p(z)$ Polynome sein.

Es sei $W(z) = \exp(-\int\limits_{z_0}^{z} a_1(t)\,dt)$ die Wronski-Determinante der $w_j(z)$ und ω ihre Ordnung. Wegen $\omega \leqq \operatorname{Max}\limits_{j=1}^{p} \lambda_j < \infty$ muß also $a_1(z)$ ein Polynom sein, $a_1(z) = A_1 z^{k_1} + \cdots$. Aus $a_p(z) = -\frac{w^{(p)}(z)}{w(z)} - a_1(z)\frac{w^{(p-1)}(z)}{w(z)}$ folgt nach dem Satz über die Schmiegungsfunktion der logarithmischen Ableitung $T(r, a_p(z)) = O(\log r)$, d. h. $a_p(z) = A_p z^{k_p} + \cdots$ ist ein Polynom. Für $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = \varrho + 1$ gilt $k_1 \leqq \varrho$, ϱ eine nicht negative ganze Zahl. Da unter der Annahme $\lambda_j = \varrho + 1$ jede Funktion $w_j(z)$ für jede zulässige ζ-Folge die Beziehung $\frac{n_j(r)}{\zeta} = N_j\, \zeta^{\varrho}(1 + \theta_j(\zeta))$ erfüllt, $N_j \neq 0, \infty$ und $\theta_j(\zeta) \to 0$ bei $\zeta \to \infty$, erhält man aus der Differentialgleichung:

$$N_j^p\,\zeta_j^{p\varrho}\,(1+\varepsilon_1(\zeta_j))+A_1\,N_j^{p-1}\,\zeta_j^{k_1+\varrho(p-1)}(1+\varepsilon_2(\zeta_j))+A_p\,\zeta_j^{k_p}(1+\varepsilon_3(\zeta_j))=0.$$

Eine solche Beziehung ist aber nur dann möglich, wenn mindestens zwei der Exponenten dem Maximum M der Zahlen $p\,\varrho$, $k_1+\varrho\,(p-1)$ und k_p gleich sind. $p\cdot\varrho<M=k_p=k_1+\varrho\,p-\varrho$, also $k_1>\varrho$, ist wegen $k_1\leqq\varrho$ nicht möglich. Daher ist $k_p\leqq\varrho\,p$. Es gilt also der

Satz: *In der Differentialgleichung $w^{(p)}+a_1(z)\,w^{(p-1)}+a_p(z)\,w=0$ seien die Koeffizienten ganze Funktionen. Besitzt diese Differentialgleichung ein Fundamentalsystem $w_j(z)$ mit den endlichen Ordnungen λ_j, so sind die Koeffizienten Polynome:*

$$a_1(z)=A_1\,z^{k_1}+\cdots,\ a_p(z)=A_p\,z^{k_p}+\cdots.$$

Ist $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_p=1+\varrho$, dann gilt für die Grade der Polynome $k_1\leqq\varrho$, $k_p\leqq\varrho\,p$. Für $\lambda=1$, also $\varrho=0$, liegt eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten vor.

In der Differentialgleichung $w''+2\,w'-z^2\,w=0$ ist $\varrho=1$, $k_1=0<1\cdot\varrho$ und $k_2=2=2\,\varrho$. Aus $\frac{n(r)}{\zeta^2}=\pm\,(1+\varepsilon\,(\zeta))$ erhält man als zulässige asymptotische Richtungen für die Stellen ζ die Halbstrahlen $\arg\zeta=0,\pi$ und $\arg\zeta=\pm\frac{\pi}{2}$. Es gibt auch Lösungen, die diese Eigenschaften haben. Durch $w(z)=e^{-z}u(z)$ geht die Differentialgleichung über in $u''-(z^2+1)\,u=0$ mit dem allgemeinen Integral $u(z)=e^{\frac{z^2}{2}}(C_1+C_2\int\limits_0^z e^{-t^2}\,dt)$. Daraus erhält man

$$w(z)=C_1\exp\left(\frac{z^2}{2}-z\right)+C_2\left[\exp\left(\frac{z^2}{2}-z\right)\right]\cdot\int\limits_0^z\exp\,(-\,t^2)\,dt.$$

Für $w_1(z)=\left(\exp\frac{z^2}{2}-z\right)$ ist $\arg\zeta=0,\ \pi+\varepsilon(\zeta)$, $\frac{n_1(r)}{\zeta^2}=1+\varepsilon(\zeta)$, also $N_1=1$. Aus $\int\limits_0^z e^{t^2}\,dt=\frac{e^{x^2}}{2x}\left(1+0\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ ergibt sich für $w_2(z)=\left[\exp\left(\frac{z^2}{2}-z\right)\right]\cdot\int\limits_0^z e^{-t^2}d\,t$ $\arg\zeta=\pm\frac{\pi}{2}+\varepsilon\,(\zeta)$ und $\frac{n_2(r)}{\zeta^2}=-\,(1+\varepsilon\,(\zeta))$, d. h. $N_2=-\,1$.

Die Aussage des Satzes läßt sich noch etwas verallgemeinern. Die lineare Differentialgleichung

$$\text{(D)}\qquad w^{(p)}+a_1(z)\,w^{(p-1)}+\cdots+a_p(z)\,w=0$$

mit Polynomkoeffizienten $a_j(z)=A_j\,z^{k_j}+B_j\,z^{k_j-1}+\cdots$ besitze ein Fundamentalsystem von ganzen transzendenten Lösungen $w_j(z)$ der Ordnung $\lambda_j=\varrho+1$, $j=1,2\ldots,p$. In den asymptotischen Richtungen gilt $\frac{n_j(r)}{\zeta_j^{\varrho+1}}\to N_j$ bei $\zeta_j\to\infty$, $j=1,2\ldots,p$. Falls alle N_j voneinander verschieden sind, gilt $k_j\leqq\varrho\cdot j$. Zum Beweis darf man $a_p(z)\not\equiv 0$ annehmen. Die Ordnungen der in (D) tatsächlich vorkommenden Ableitungen seien $0=\mu_0<\mu_1<\cdots<\mu_\varkappa=p$, $A_0=A_{\mu_0}=1$, $k_0=0$. Dann folgt aus (D) für $j=1,2\ldots,p$

$$\text{(D}'\text{)}\qquad \sum_{\alpha=0}^{\varkappa}A_{\mu_\alpha}\,\zeta_j^{\varrho(p-\mu_\alpha)+k_{\mu_\alpha}}.\ N_j^{p-\mu_\alpha}(1+\theta_{\mu_\alpha}^{(j)}(\zeta_j))=0.$$

Das ist aber nur möglich, wenn für mindestens zwei Indizes α_1 und α_2

$$\varrho\,(p-\mu_{\alpha_1})+k_{\mu_{\alpha_1}}=\varrho\,(p-\mu_{\alpha_2})+k_{\mu_{\alpha_2}}=M=\operatorname*{Max}_{\alpha=0}^{\varkappa}(\varrho\,(p-\mu_\alpha)+k_{\mu_\alpha})$$

richtig ist. Es gilt also für eine gewisse Teilmenge $\mu_{\alpha_1}<\mu_{\alpha_2}<\cdots<\mu_{\alpha_m}$ von $\mu_0,\ldots,\mu_\varkappa$: $\varrho\,(p-\mu_{\alpha_\nu})+k_{\mu_{\alpha_\nu}}=M$, $\nu=1,2,\ldots,m$. Dann folgt aus (D′)

$$\sum_{\nu=1}^{m}A_{\mu_{\alpha_\nu}}N_j^{p-\mu_{\alpha_\nu}}(1+\theta^{(j)}_{\mu_{\alpha_\nu}}(\zeta_j))=0,$$

d. h. es muß gelten

$$\sum_{\nu=1}^{m}A_{\mu_{\alpha_\nu}}N_j^{p-\mu_{\alpha_\nu}}=0.$$

Da diese Gleichung für die p verschiedenen Zahlen $N_1,\ldots,N_p$ erfüllt ist und die $A_{\mu_{\alpha_\nu}}\neq 0$ sind, muß $\mu_{\alpha_1}=\mu_0=0$ und $\mu_{\alpha_m}=p$ sein, d. h. in der Teilmenge $\mu_{\alpha_1},\ldots,\mu_{\alpha_m}$ müssen μ_0 und μ_{α_m} vorkommen. Es ist also $M=\varrho\cdot p=k_p$ und

$$\varrho\,(p-\mu_\alpha)+k_{\mu_\alpha}\leqq M=\varrho\,p,\ \text{d. h.}\ k_{\mu_\alpha}\leqq\varrho\cdot\mu_\alpha.$$

Mithin gilt unter den angegebenen Voraussetzungen

$$k_j\leqq j\,\varrho\ \text{für}\ j=1,2\ldots,p-1\ \text{und}\ k_p=p\,\varrho,$$

also die Behauptung. Die Voraussetzung, alle N_j sind verschieden voneinander, ist sicher erfüllt, wenn die den Mitteltypus bestimmenden Zahlen $m_j=\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\log M(r,w_j)}{r^{\varrho+1}}$ alle verschieden sind. Die Punkte $S_0=(0,(\varrho+1)\,p)$ und $S_p=(p,0)$ bestimmen eine Gerade $\mathfrak{g}$, auf der die Punkte $S'_{\mu_\alpha}=(\mu_\alpha,(\varrho+1)\,(p-\mu_\alpha))$ liegen. Die Punkte $S_{\mu_\alpha}=(\mu_\alpha,p-\mu_\alpha+\varrho\,p-k_{\mu_\alpha})$ liegen wegen $p-\mu_\alpha+\varrho\,p-k_{\mu_\alpha}\geqq p-\mu_\alpha+\varrho\,p-\varrho\,\mu_\alpha=(\varrho+1)\,(p-\mu_\alpha)$ nie unterhalb der Geraden $\mathfrak{g}$, und falls alle S_{μ_α} auf $\mathfrak{g}$ liegen, hat man $k_\mu=\varrho\,\mu$. Für $\varrho=0$ erhält man unter den angegebenen Voraussetzungen eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Ist durchweg $k_j=\varrho\,j$, so ist

$$N^p+A_1N^{p-1}+\cdots+A_p=0,$$

und in den asymptotischen Richtungen gilt $\log w_j(\zeta)=\frac{N_j}{\varrho+1}\,\zeta^{\varrho+1}(1+\varepsilon_j(\zeta))$.

4. Jede ganze transzendente Lösung einer algebraischen Differentialgleichung, die sich auf die Form (6) bringen läßt, ist vom Mitteltypus einer rationalen Ordnung $\lambda\geqq\frac{1}{g_m}$. Aus dieser Tatsache folgt z. B., daß die ganze transzendente Funktion $g(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}$ keiner solchen Differentialgleichung genügen kann, weil wegen $T(r,g)=\frac{r\log r}{\pi}(1+\varepsilon(r))$ $g(z)$ vom Maximaltypus der Ordnung 1 ist. Zum Nachweis, daß $g(z)$ überhaupt keiner algebraischen Differentialgleichung genügt, benützt man wesentlich die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1)=z\cdot\Gamma(z)$. In diesem Zusammenhang wäre es von Interesse zu wissen, ob eine beliebige algebraische Differentialgleichung eine ganze Funktion vom Maximaltypus einer rationalen Ordnung als Lösung haben kann.

Wegen $\lambda\geqq\frac{1}{g_m}$ kann eine Funktion der Ordnung Null nie einer Differentialgleichung der hier betrachteten Klasse genügen. Das gilt nicht mehr allge-

mein für jede algebraische Differentialgleichung, wie G. VALIRON[11]) durch ein Beispiel belegte. Er zeigte, daß die Funktion $F(z) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{z\,q^{2n+1}}{1+q^{4n+2}}\right)$ einer algebraischen Differentialgleichung dritter Ordnung genügt. Wegen $|q| < 1$ weichen die Nullstellen $z = -\left(\frac{1}{q^{2n+1}} + q^{2n+1}\right)$ der Funktion $F(z)$ für große n wenig von den Stellen $z = -\frac{1}{q^{2n+1}}$ ab. Bildet man mit diesen Nullstellen die Funktion $f(z) = \prod_{n=0}^{\infty}(1 + z\cdot q^{2n+1})$, so gilt $(1+q\,z)\,f(q^2 z) = f(z)$. Diese Funktion $f(z)$ genügt keiner algebraischen Differentialgleichung. Für beide Funktionen gilt

$$\log M(r) = \frac{1}{4\log\frac{1}{|q|}}(\log r)^2(1+\theta(r)), \quad \text{also } \lambda = 0.$$

Die Funktionalgleichung $(1+q\,z)\,f(q^2 z) = f(z)$ ist als Sonderfall in

$$f(s\,z) = p(z)\,f(z) + q(z)$$

enthalten. Dabei sind $p(z)$, $q(z)$ Polynome und $S = |s| > 1$. Es sei weiter $p'(z) \not\equiv 0$, da im Falle $p'(z) \equiv 0$ die Funktionalgleichung keine ganze transzendente Lösung besitzt. Für den Maximalbetrag von $f(z)$ gilt, wenn $m \geq 1$ der Grad von $p(z)$ ist,

$$\log M(r) = \frac{m}{2\log S}(\log r)^2(1+\varepsilon(r)), \quad \lim_{r\to\infty}\varepsilon(r) = 0,$$

d. h. $f(z)$ ist von der Ordnung Null. An anderer Stelle[12]) wurde gezeigt, daß diese Funktionen keiner algebraischen Differentialgleichung genügen können. Mit $s = \frac{1}{q^2}$, $t = q^2 z$ erhält man aus $(1+q\,z)\,f(q^2 z) = f(z)$ $f(st) = (1+\sqrt{s}\,t)\,f(t)$; wegen $p'(t) = \sqrt{s} \neq 0$ genügt also $f(t)$ und damit auch $f(z) = \prod_{n=0}^{\infty}(1+z\,q^{2n+1})$ keiner algebraischen Differentialgleichung.

Ist $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ eine ganze transzendente Lösung von $f(s\,z) = p(z)\,f(z) + q(z)$, so berechnen sich die Koeffizienten a_ν aus der Gleichung

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{s^n - p(0)}\sum_{\mu=1}^{n}\binom{n}{\mu}p^{(\mu)}(0)\,f^{(n-\mu)}(0) + q^{(n)}(0), \tag{8}$$

die sich für hinreichend große n ($n \geq N_1$) wegen $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ und $c_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}$ auf

$$a_n = \frac{1}{s^n - p(0)}\sum_{\mu=1}^{m} c_{m-\mu}\,a_{n-\mu} \tag{8'}$$

reduziert. Daraus erhält man wegen $S > 1$ und $|c_{m-\mu}| \leq C$ für alle $n \geq N$ $|a_n| \leq \frac{2C}{S^n}\sum_{\mu=1}^{m}|a_{n-\mu}|$. Durch eventuelle Vergrößerung von N läßt sich

---

[11]) VALIRON, G.: C. r. Acad. Sci. **180** (1925).
[12]) WITTICH, H.: Arch. f. Math. **2**, H. 2 (1949/50).

$|a_{N-\mu}| \leqq 1$, $\mu = 1, \ldots, m$, und $\frac{2C}{S^n} < \frac{1}{S^{n-p}}$ erreichen, p eine passende natürliche Zahl. Aus

$$(8'') \qquad |a_{N+\lambda}| < \frac{1}{S^{\alpha+\lambda}} \sum_{\mu=1}^{m} |a_{N+\lambda-\mu}|, \quad \lambda = 1, 2, \ldots \text{ und } \alpha = N - p,$$

erhält man dann durch wiederholte Anwendung

$$|a_{N+jm+\mu}| < \frac{F_j \cdot m + \mu}{\exp\left[(\mu+\alpha)(j+1) + \frac{m}{2} j(j+1)\right] \log S};$$

dabei ist μ der Werte $1, 2, \ldots, m$ fähig und $j = 0, 1, 2, \ldots$. Die Zahlen F_n bestimmen sich rekursiv aus $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + \cdots + F_{n-m}$ für $n \geqq m+1$, wobei die Anfangsglieder $F_1, F_2, \ldots, F_m$ gegebene positive Zahlen sind. Aus der Theorie der linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten erschließt man die Existenz einer nur von m abhängigen Konstanten $k = k(m)$, so daß $F_n \leqq k^n$ für alle $n \geqq m+1$ gilt, also $F_{jm+\mu} \leqq F_{(j+1)m} \leqq k^{(m+1)j} = C^j$. Wegen $(\mu+\alpha)(j+1) + \frac{m}{2} j(j+1) \geqq (1+\alpha)(j+1) + m' j^2$ erhält man

$$|a_{N+jm+\mu}| < \frac{C^j}{S^{(1+\alpha)(j+1)}} \cdot \frac{1}{S^{m'j^2}} < \left(\frac{C}{S^{1+\alpha}}\right)^j \frac{1}{S^{m'j^2}} < \frac{1}{S^{m''j^2}}, \; m = 2m' = 4m'',$$

falls nur j hinreichend groß ist. Mit $n = N + j \cdot m + \mu, j \geqq \frac{n - m - N}{m} \geqq \frac{n}{2m}$ für alle $n \geqq \bar{N} > N$ folgt schließlich $|a_n| < S^{-\frac{n^2}{16m}}$. Es gilt also für alle n die Abschätzung

$$(9) \qquad |a_n| < A \cdot B^{-n^2} \text{ mit } B = S^{\frac{1}{16m}} > 1.$$

Nun gilt der folgende

Satz von POPKEN[13]): *Stellt die Potenzreihe* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *mit algebraischen Koeffizienten* a_n *eine im Ursprung regulär analytische Funktion dar, die einer eigentlichen algebraischen Differentialgleichung genügt (algebraische Koeffizienten und daher o. B. d. A. ganze rationale Koeffizienten), so ist mit einem geeignet gewählten* $c > 0$ *für jedes ganze* $n \geqq 2$ *entweder* $a_n = 0$ *oder* $|a_n| \geqq \exp(-c\, n (\log n)^2)$.

Dieser Satz liefert zusammen mit der Koeffizientenabschätzung $|a_n| < \exp(\log A - n^2 \log B)$ ein Teilergebnis über die Lösungen von $f(sz) = p(z) f(z) + q(z)$. Die Koeffizienten gehen erheblich schneller nach Null, als es die Schranke im Satz von POPKEN gestattet. Für die Funktion $f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + z q^{2n+1})$ findet man unter Benützung der Funktionalgleichung $f(z) = (1 + qz) f(q^2 z)$: $|a_n| \leqq C \cdot q^{n^2}$, $|q| < 1$.

[13]) POPKEN, J.: Über arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen. Amsterdam 1935.

(Eingegangen am 24. Januar 1950.)

Math. Annalen, Bd. 122, S. 235—258 (1950).

Struktur- und Mächtigkeitsuntersuchungen an gewissen unendlichen Graphen mit einigen Anwendungen auf lineare Punktmengen.

Von

THEODOR KALUZA JR. in Braunschweig.

In der Theorie der endlichen Graphen nennt man einen kreislosen zusammenhängenden Graphen einen Baum[1]). Analog dazu könnte man bei der Betrachtung unendlicher Graphen einen kreislosen zusammenhängenden Graphen endlichen Grades einen unendlichen Baum nennen. Wir wollen uns auf die Untersuchung unendlicher Bäume mit höchstens einem Endpunkt beschränken und sie kurz *Fächer* nennen. Die Übertragung der unten für Fächer entwickelten Begriffe, Ergebnisse und Beweise auf beliebige unendliche Bäume bietet dann nichts Neues und an Schwierigkeiten nur die Notwendigkeit einer umständlicheren Ausdrucksweise. Der endliche Grad der Knotenpunkte wird in den Beweisen häufig benutzt. Für unendliche kreislose zusammenhängende Graphen abzählbar unendlichen Grades wäre Satz 1 falsch. Die übrigen Ergebnisse sind aber sinngemäß übertragbar.

Wie jeder zusammenhängende unendliche Graph endlichen Grades besitzt ein Fächer mindestens einen einseitig unendlichen Weg, dessen Ausgangspunkt beliebig vorgeschrieben werden kann[2]). Da ferner bei jedem zusammenhängenden Graphen endlichen Grades sowohl die Menge der Kanten wie die der Knotenpunkte abzählbar ist[3]), und da der gewiß vorhandene einseitig unendliche Weg unendlich viele Kanten und unendlich viele Knotenpunkte enthält, folgt:

Ein Fächer besitzt abzählbar unendlich viele Kanten und abzählbar unendlich viele Knotenpunkte.

Im folgenden wird stets angenommen, daß die jeweils betrachteten Fächer auf folgende immer durchführbare Art in gerichtete Graphen umgewandelt sind, — und wenn von Lagebeziehungen zwischen Elementen eines Fächers die Rede ist, so sind sie im Sinne dieser Orientierung zu verstehen:

Der Endpunkt des Fächers, und falls keiner vorhanden ist, ein beliebiger Knotenpunkt, wird als *Anfang* des gerichteten Fächers wie des Orientierungsverfahrens gewählt. A bedeutet fortan diesen Anfang;

die Kanten, die in A zusammenstoßen, werden so gerichtet, daß A ihr Anfangspunkt ist;

immer, wenn nach dieser Vorschrift irgendwelche Kanten gerichtet worden sind, werden die von ihren Schlußpunkten ausgehenden noch nicht gerichteten Kanten so gerichtet, daß sie diese Schlußpunkte zu Anfangspunkten haben.

Da ein Fächer zusammenhängend ist, wird dadurch tatsächlich jeder Kante eine Richtung gegeben — und zwar beim $(n+1)$-ten Schritt, wenn

---

[1]) Zur Terminologie des graphentheoretischen Teils dieser Arbeit vgl. D. KÖNIG, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Akad. Verl.-Ges., Leipzig 1936.

[2]) Vgl. ebenda S. 80, Satz 3.

[3]) Vgl. ebenda S. 79, Satz 1.

zwischen A und dem A näher gelegenen ihrer Endpunkte n weitere Kanten liegen —, und wegen der Kreislosigkeit geschieht das auch eindeutig. Soll ein so von dem Punkt A aus gerichteter Fächer ohne Endpunkt von einem anderen Punkt A' aus gerichtet werden, so ist lediglich bei den Kanten des Weges AA' die Richtung umzukehren.

Weiter wollen wir für die Untersuchung der so gerichteten Fächer folgendes vereinbaren:

Die bei A beginnenden einseitig unendlichen Wege heißen A-Wege;

ein A-Weg, der außer A u. a. die Punkte $P, Q, \ldots, V$ in dieser Reihenfolge enthält, heißt ein A-P-Q-...-V-Weg;

jeder Knotenpunkt mindestens dritten Grades und der Punkt A, wenn er kein Endpunkt des Fächers, also mindestens zweiten Grades ist, heißt ein Gabelungspunkt;

ist P der Anfangspunkt einer gerichteten Kante $\overrightarrow{PQ}$, so heißt der Ast $(P, \overline{PQ})$ „ein von P fortgehender Ast" und $\overrightarrow{PQ}$ die „Anfangskante" dieses Astes. Wir schreiben kurz „der Ast $\overrightarrow{PQ}$" und meinen damit also den Teil des Fächers, der von all den Kanten und Knotenpunkten gebildet wird, die auf A-P-Q-Wegen, aber nicht vor P liegen. Von A-P-Q-Wegen sagen wir weiter, daß sie in den Ast $\overrightarrow{PQ}$ einmünden. (Jeder Ast $\overline{PQ}$ eines Fächers ist selbst ein bereits gerichteter Fächer, in dem P die Rolle von A spielt. Da jeder Ast eine Anfangskante $\overrightarrow{PQ}$ besitzt und jede Kante $\overrightarrow{RS}$ Anfangskante eines Astes $\overrightarrow{RS}$ ist, und da es in einem Fächer abzählbar unendlich viele Kanten gibt, enthält ein Fächer auch abzählbar unendlich viele Äste.) Ein Ast $\overrightarrow{PQ}$, der von einem Gabelungspunkt P ausgeht, außer P aber keine Gabelungspunkte enthält, — in den also nur ein A-Weg einmündet —, heißt eine Rute;

ist schließlich P ein Punkt des A-Weges W und Z ein von P fortgehender Ast, der mit W keine Kante gemeinsam hat, so möge Z ein von W abzweigender Ast heißen. (P ist dann notwendig ein Gabelungspunkt.) Ein A-Weg, der in einen von W abzweigenden Ast einmündet, heißt ein von W abzweigender A-Weg.

Gefragt wird nun nach den Strukturmöglichkeiten bei Fächern und nach dem Zusammenhang zwischen der Struktur und der Mächtigkeit der Menge der A-Wege eines Fächers.

Bemerkungen zur Formulierung der Beweise:

1. Bei den verschiedentlich auftretenden Beweisen, daß gewisse Teilgraphen von Fächern wieder Fächer sind, versteht sich von selbst: jeder Teilgraph eines Fächers ist notwendig kreislos und von endlichem Grade, da schon der Fächer, in den er eingebettet ist, diese Eigenschaften besitzt. Soll also von einem Teilgraphen eines Fächers bewiesen werden, daß auch er ein Fächer ist, so genügt der Nachweis, daß der betr. Teilgraph unendlich und zusammenhängend ist und höchstens einen Endpunkt besitzt. Daß er ein unendlicher Graph ist, ist ferner erwiesen, wenn gezeigt wird, daß er mindestens einen A-Weg des Originalfächers enthält, oder daß der Schlußpunkt Q einer gerichteten Kante $\overline{PQ}$ des Teilfächers niemals ein Endpunkt des Teilfächers

ist, so daß es zu jeder Kante $\overrightarrow{PQ}$ mindestens eine nachfolgende Kante $\overrightarrow{QR}$ in dem Teilfächer gibt.

2. Im Hinblick auf die in der Punktmengenlehre gebräuchlichsten Formulierungen (z. B. des Cantor-Bendixsonschen Satzes über die Ableitungen von Punktmengen) wird hier unter der *ersten* Zahlklasse die Menge der der Größe nach wohlgeordneten endlichen Ordinalzahlen $(0, 1, \ldots)$ und unter der *zweiten* Zahlklasse die zu der kleinsten transfiniten Mächtigkeit $\aleph_0$ gehörige Zahlklasse Z_0 verstanden.

3. Es wird mehrfach von dem bekannten Satze Gebrauch gemacht, daß es zu jeder abzählbaren Menge $M = \{\alpha\}$ von Ordinalzahlen α der ersten und zweiten Zahlklasse eine Ordinalzahl α_0 in einer dieser Zahlklassen derart gibt, daß $\alpha \leqq \alpha_0$ für alle α aus M gilt. Dieses α_0 wird dann kurz als eine „die gegebenen α *majorisierende* Ordinalzahl" bezeichnet.

4. Vollständige Induktionen, deren schemagetreue Durchführung nach der Schilderung einiger Induktionsschritte allzu trivial erschiene, werden unterdrückt.

Satz 1: *Ein Fächer mit unendlich vielen A-Wegen besitzt mindestens einen A-Weg mit unendlich vielen Gabelungspunkten.*

Beweis: Mindestens einer der endlich vielen von A fortgehenden Äste muß gleichfalls unendlich viele A-Wege enthalten. Da er also keine Rute sein kann, muß er Gabelungspunkte enthalten. Von A ausgehend stößt man daher in einem so ausgezeichneten Ast nach Durchlaufung endlich vieler Kanten auf einen ersten Gabelungspunkt G_1 derart, daß auf dem Wege $A\,G_1$ kein Gabelungspunkt liegt. Es gibt daher unendlich viele A-G_1-Wege. Der Weg $A\,G_1$ werde markiert. In mindestens einen der von G_1 fortgehenden Äste müssen wiederum unendlich viele A-Wege einmünden, und in einem solchen Ast gibt es daher wieder — jetzt von G_1 aus gerechnet — einen ersten Gabelungspunkt G_2. Der Weg $G_1\,G_2$ werde gleichfalls markiert. Da bei n-facher Wiederholung dieses Schlusses die Existenz unendlich vieler A-G_1-G_2- . . . -G_n-Wege gesichert ist, kann der Schluß unbeschränkt wiederholt werden und liefert dann in Gestalt der markierten Kanten einen A-Weg mit unendlich vielen Gabelungspunkten. q. e. d.

Definition 1: Unter einem Kamm verstehen wir einen Fächer, der genau einen A-Weg mit unendlich vielen Gabelungspunkten und sonst nur von diesem A-Weg abzweigende Ruten enthält.

Nach Satz 1 ist ein Kamm der einfachste Fächer mit unendlich vielen A-Wegen im Sinne des folgenden Satzes:

Satz 2: *Jeder Fächer F mit unendlich vielen A-Wegen enthält einen Kamm K als Teilfächer.*

Beweis: Nach Satz 1 enthält F einen A-Weg W mit unendlich vielen Gabelungspunkten $G_1, G_2, \ldots$. In jedem dieser Gabelungspunkte zweigt von W mindestens ein A-Weg ab. Jeweils einer wird als in K von W in G_n abzweigende Rute gewählt. q. e. d.

Definition 2: Ein Fächer, in dem jeder A-Weg unendlich viele Gabelungspunkte enthält, heißt eine *Vollverzweigung*. V bedeutet fortan eine Vollverzweigung.

Äquivalent damit ist die

Definition 2a: Ein Fächer heißt eine *Vollverzweigung*, wenn er keine Rute enthält.

Gibt es nämlich in einem Fächer einen A-Weg mit nur endlich vielen Gabelungspunkten, so ist der Teil dieses A-Weges, der hinter dem letzten Gabelungspunkt liegt, eine Rute. Gibt es umgekehrt in dem Fächer eine Rute, so stellt diese Rute $\overrightarrow{PQ}$ zusammen mit dem Weg AP einen A-Weg mit nur endlich vielen Gabelungspunkten dar.

Aus beiden Definitionen erkennt man mit ganz ähnlichen Schlüssen:

Jeder Ast $\overrightarrow{PQ}$ einer Vollverzweigung ist selbst eine Vollverzweigung und enthält insbesondere unendlich viele Gabelungspunkte.

Eine Aussage über Vollverzweigungen als Teile von Fächern findet sich in Satz 5 und 10.

Satz 3: *Die Menge der A-Wege in einer Vollverzweigung hat die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuums.*

Beweis: Beginnt man in einer Vollverzweigung von A aus die abzählbar unendlich vielen Kanten eines zunächst noch unbestimmten A-Weges zu durchlaufen, so hat man bei jedem Gabelungspunkt mindestens 2 — aber nur endlich viele — Möglichkeiten weiterzulaufen. Da man nun immer wieder auf einen Gabelungspunkt stößt, gleichgültig wie man bisher gelaufen ist (vgl. Def. 2), so gilt für die Mächtigkeit $\mathfrak{w}$ der Menge der A-Wege einer Vollverzweigung: $2^{\mathfrak{a}} \leqq \mathfrak{w} \leqq \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}$, woraus wegen $2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$ sofort die Behauptung folgt. q. e. d.

Bezeichnung: V_k $(k > 1)$ bedeutet die Vollverzweigung, bei der jeder Punkt Anfangspunkt von k Kanten ist. In V_k ist also A von k-tem und jeder Knotenpunkt $P \neq A$ von $(k+1)$-tem Grade.

Satz 4: *F sei ein Fächer, bei dem der Grad der Knotenpunkte durch die Zahl $k > 1$ beschränkt ist. Dann gilt: a) F läßt sich als Teilfächer von V_k auffassen. Ist auch noch $k - 1 > 1$, und existiert also V_{k-1}, so gilt weiter: b) Besitzt F einen Endpunkt, so läßt sich F als Teilfächer von V_{k-1} auffassen. c) Besitzt F keinen Endpunkt, aber einen Knotenpunkt, dessen Grad kleiner als k ist, und wird dieser als Anfang A_F der Orientierung von F gewählt, so läßt sich F gleichfalls als Teilfächer von V_{k-1} auffassen.*

Beweis: a) Man beziffere bei jedem Knotenpunkt P von F und V_k die von P fortgehenden Kanten irgendwie mit verschiedenen der Ziffern $1, \ldots, k$. In V_k gibt es dann bei jedem P von P fortgehende Kanten mit den Ziffern $1, \ldots, k$. In F fehlt bei $P \neq A$ bei den von P fortgehenden Kanten mindestens eine dieser Ziffern, bei $A_F = A$ von F können aber alle vertreten sein. Man bringe nun zur Deckung: A_F mit $A_V = A$ von V_k, dann die von A_F bzw. A_V fortgehenden Kanten mit gleichen Ziffern, dann die von den Schlußpunkten der jetzt zur Deckung gebrachten Kanten fortgehenden Kanten mit jeweils gleichen Ziffern, und so fort. Eine nunmehr triviale vollständige Induktion zeigt den Teil a) der Behauptung. b) und c) Sind die Voraussetzungen von b) oder c) erfüllt, so genügen zur Bezifferung der von den Knotenpunkten P von F fortgehenden Kanten die Ziffern $1, \ldots, k-1$, — jetzt einschließlich des Punktes A_F, woraus sich analog wie bei a) die Einbettungsmöglichkeit in V_{k-1} ergibt. q. e. d.

Die Trennung der Fälle b) und c) in der Formulierung des Satzes ist aus folgendem Grunde nötig: Sind in F mehrere Punkte von kleinerem als k-tem Grade vorhanden, aber keiner vom Grade 1 (Fall c)), so kann ein beliebiger von ihnen als A_F gewählt und mit A_V zur Deckung gebracht werden. Ist

aber ein Punkt vom Grade 1 in F enthalten (Fall b)), so muß dieser als A_F gewählt und mit A_F zur Deckung gebracht werden, auch wenn noch andere Punkte von kleinerem als k-tem Grade in F vorhanden sind, da sonst die Orientierungsvorschriften verletzt würden.

Satz 5: *In jeder Vollverzweigung V gibt es eine Menge der Mächtigkeit* $\mathfrak{c}$ *von in V als Teilfächer enthaltenen Vollverzweigungen, von denen je zwei nur endlich viele gemeinsame Kanten und also keinen gemeinsamen A-Weg besitzen.*

Beweis: In der gegebenen Vollverzweigung V mögen zunächst bei jedem Gabelungspunkt G alle von G fortgehenden Äste bis auf 2 gestrichen werden. Ist A ein Endpunkt von V, geht also von A nur eine Kante fort, so wird man, wenn man diese Kante, und falls ihr Schlußpunkt kein Gabelungspunkt ist, die nächste Kante durchläuft, und so weiter, nach Durchlaufung endlich vieler Kanten auf einen ersten hinter A gelegenen Gabelungspunkt G_0 stoßen, da es in V definitionsgemäß Gabelungspunkte gibt. Wenn nun A ein Endpunkt von V ist, möge auch noch der Weg $A\,G_0$ gestrichen werden. Bei diesen Streichungen bleibt jeder Gabelungspunkt G von V, — wenn er nicht auf einem gestrichenen Ast lag und also mitgestrichen wurde —, ein Gabelungspunkt, und zwar ist er jetzt zu einem Gabelungspunkt geworden, von dem genau zwei Kanten fortgehen. Daraus folgt, daß der nach den genannten Streichungen verbleibende Rest R nicht der Nullgraph ist, und daß er sich von der V_2 nur durch eventuell vorhandene zwischen den Gabelungspunkten gelegene Knotenpunkte 2ten Grades unterscheidet, — wenn er überhaupt ein Fächer ist, was im nächsten Absatz gezeigt werden wird. Der Punkt A, bzw. der zum Anfang von R gewordene Punkt G_0, wenn der Weg $A\,G_0$ gestrichen werden mußte, gilt vereinbarungsgemäß als Gabelungspunkt. Denkt man sich nun noch die in den Nicht-Gabelungspunkten von R zusammenstoßenden Kanten miteinander verschmolzen, so ist R in die V_2 übergegangen. Fügt man nun die gelöschten Knotenpunkte, Kanten und Äste wieder ein, so geht jeder A-Weg W der V_2 in einen wohlbestimmten A-Weg W' von V über: einige — möglicherweise auch alle — Kanten von W sind durch wiedereingefügte Knotenpunkte 2ten Grades in endlich viele Kanten unterteilt, und wenn A von V ein Endpunkt war, ist an W noch vorne der Weg $A\,G_0$ angesetzt. Verschiedene A-Wege W_1 und W_2 von R gehen dabei in verschiedene A-Wege W_1' und W_2' von V über. Es genügt danach, den Satz speziell für $V = V_2$ zu beweisen.

Daß R ein Fächer ist, läßt sich so einsehen: Ist $K = \overrightarrow{PQ}$ eine Kante von R, so gab es in V mindestens eine von ihrem Schlußpunkt Q fortgehende Kante $\overrightarrow{QR}$, und bei Befolgung der Streichungsvorschriften bleibt auch mindestens eine der in V von Q fortgehenden Kanten für R erhalten. Daraus folgt, daß der Schlußpunkt Q einer Kante $\overrightarrow{PQ}$ von R kein Endpunkt von R ist. R ist also ein unendlicher Graph. Ist $P \neq A$ bzw. $\neq G_0$ ein beliebiger Punkt von R, so gibt es in V einen eindeutigen Weg, der P mit A bzw. G_0 verbindet. Dieser Weg ist auch in R enthalten. Würde nämlich eine seiner Kanten in R fehlen, so müßte sie zu einem gestrichenen Ast gehören und andererseits auf dem Wege $A\,P$ bzw. $G_0\,P$ vor P liegen, so daß auch die Kante $\overrightarrow{PQ}$ selbst zu diesem gestrichenen Ast und somit gar nicht zu R gehört hätte. (Auf dem gestrichenen Wege $A\,G_0$ kann die fehlende Kante nicht liegen, da sie ja auf dem Wege $G_0\,P$ hinter G_0 liegen muß.) Folglich ist auch der Anfangspunkt $P \neq A$ bzw. $\neq G_0$

einer Kante $\overrightarrow{PQ}$ von R kein Endpunkt von R. R selbst ist daher ein Fächer.

Wir weisen nun die Richtigkeit des Satzes 5 für $V = V_2$ nach:

In V_2 werden in jedem Punkte die beiden von ihm fortgehenden Kanten mit den Ziffern 0 und 1 numeriert. Dann entspricht jedem A-Weg W der V_2 umkehrbar eindeutig eine aus den Ziffern 0 und 1 gebildete Folge $a_1, a_2, \ldots$. In der V_2 wird nun bei jedem Punkt mit der Entfernung $2n - 1$ von A derjenige von diesem Punkt fortgehende Ast gestrichen, dessen Anfangskante die von a_n verschiedene Ziffer trägt ($n = 1, 2, \ldots$). Die Punkte mit gerader Entfernung von A bleiben dabei Gabelungspunkte und der Rest R ist also eine Teilvollverzweigung von V_2; er wird dem A-Weg W zugeordnet. Nach Satz 3 ist die Menge aller so gebildeten Teilvollverzweigungen von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Sind W_0 und W_1 zwei verschiedene A-Wege der V_2, $(a_n^{(0)})$ und $(a_n^{(1)})$ die zugehörigen Ziffernfolgen und R_0 bzw. R_1 die zugeordneten Reste (Teilvollverzweigungen), so gibt es einen wohlbestimmten kleinsten Index n_0 derart, daß $a_{n_0}^{(0)} \neq a_{n_0}^{(1)}$ ist, denn W_0 und W_1 münden ja als verschiedene A-Wege bei einem wohlbestimmten Gabelungspunkt in verschiedene der beiden von diesem Gabelungspunkt fortgehenden Äste. Daraus folgt, daß jeder A-Weg von R_0 in der Entfernung $2n_0 - 1$ von A gerade in den Ast mündet, der bei der Bildung von R_1 gestrichen wurde und umgekehrt. R_0 und R_1 haben also nur solche Kanten gemeinsam, deren Schlußpunkte höchstens die Entfernung $2n_0 - 1$ von A haben. q. e. d.

Bemerkung: Bei der im letzten Absatz des Beweises zu Satz 5 durchgeführten Konstruktion von Teilvollverzweigungen gehört jeder A-Weg der V_2 genau einer Teilvollverzweigung der V_2 an. Ist nämlich $a_1, a_2, \ldots$ die dem A-Weg W zugeordnete Ziffernfolge, so enthält die mit der Folge $a_2, a_4, \ldots$ gebildete Teilvollverzweigung den A-Weg W. Denn an den Punkten ungrader Entfernung von A ist gerade der Ast stehengeblieben, in den W einmündet, und an den Punkten gerader Entfernung von A sind beide Äste stehengeblieben, insbesondere also auch der, in den W einmündet. Daß W in höchstens einer der Teilvollverzweigungen enthalten ist, sagt der Satz 5 selbst.

Satz 6: *Es sei U irgendein Fächer und $\mathfrak{F} = \{F\}$ irgendeine Menge von Teilfächern von U, die alle den Anfang A von U enthalten. Der Graph $T(\mathfrak{F})$, der aus all den Kanten und Knotenpunkten von U besteht, die zu mindestens einem F aus $\mathfrak{F}$ gehören, ist wieder ein Fächer (der ein Teilfächer von U ist und A von U enthält).*

Beweis. Sei K irgendeine Kante von $T(\mathfrak{F})$ und F_K ein Fächer aus $\mathfrak{F}$, der K enthält. Dann gehört K wegen der Fächernatur von F_K zu einem A-Weg W von F_K. Nach Definition von $T(\mathfrak{F})$ gehört auch W zu $T(\mathfrak{F})$. $T(\mathfrak{F})$ ist daher zusammenhängend und hat höchstens in A einen Endpunkt. q. e. d.

Bezeichnung: Den durch Satz 6 als existierend erwiesenen Fächer $T(\mathfrak{F})$ nennen wir die *Hülle* von $\mathfrak{F}$.

Definition 3: Unter einer „in dem Fächer U geschachtelten" Menge von Fächern verstehen wir eine Menge $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ von Fächern mit folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt einen Fächer U so, daß jedes F_α aus $\mathfrak{F}$ ein Teilfächer von U ist und A von U enthält;

2. $\mathfrak{F}$ ist wohlgeordnet, und der Index α des Elementes F_α ist die Ordinalzahl des durch F_α bestimmten Abschnitts von $\mathfrak{F}$;

3. ist $\alpha < \beta$, so ist F_α ein echter Teil von F_β.

Satz 7: *Zu jeder Ordinalzahl α der ersten oder zweiten Zahlklasse gibt es in einem Kamm K (und damit nach Satz 2 in jedem Fächer mit unendlich vielen A-Wegen) geschachtelte Mengen von Teilfächern mit der Ordinalzahl α.*

Beweis: Für endliches α ist der Satz trivial. Es sei α eine Ordinalzahl der zweiten Zahlklasse. Die Menge der Ordinalzahlen $\beta < \alpha$ ist abzählbar unendlich; sie werde abgezählt: $\beta_0, \beta_1, \ldots$. Die Ruten von K mögen gleichfalls abgezählt werden: $R_0, R_1, \ldots$. Wir denken uns die Ruten nun umbenannt, indem wir der Rute R_n die Ordinalzahl β_n als Index geben. Dann gibt es in K zu jedem $\beta < \alpha$ genau eine Rute mit dem Index β. Wir setzen nun fest: F_β ist derjenige Teilfächer von K, der den A-Weg mit unendlich vielen Gabelungspunkten von K enthält, und dazu die Ruten R_μ mit $\mu < \beta$. Dann ist $\mathfrak{F}_\alpha = \{F_\beta\}_{\beta<\alpha}$ offenbar eine in K geschachtelte Menge mit der Ordinalzahl α, wenn die F_β nach der Größe der Indizes β geordnet werden. Denn $\mathfrak{F}_\alpha$ ist wohlgeordnet, enthält zu jedem $\beta < \alpha$ ein Element F_β, und für $\beta_1 < \beta_2$ ist nach Konstruktion F_{β_1} ein echter Teil von F_{β_2}. q. e. d.

Trotz der in Satz 5 und Satz 7 genannten Möglichkeiten besteht der

Satz 8: *Jede in einem Fächer U geschachtelte Menge $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ von Fächern ist abzählbar.*

Beweis: Wir bezeichnen die Anfangszahl der dritten Zahlklasse mit ω_1. Wäre $\mathfrak{F}$ nicht abzählbar, so enthielte $\mathfrak{F}$ ein Anfangsstück $\mathfrak{A}$ mit der Ordnungszahl ω_1 : $\mathfrak{A} = \{F_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$; die Indizes der Elemente von $\mathfrak{A}$ wären also gerade die Ordinalzahlen der ersten und zweiten Zahlklasse. $\mathfrak{A}$ besäße eine Hülle und diese bestände als Fächer aus abzähbar vielen Kanten $K_0, K_1, \ldots$. Zu jedem n gäbe es eine kleinste Zahl α_n der ersten oder zweiten Zahlklasse derart, daß K_n in F_{α_n} — und dort also zum ersten Mal — vorkommt. Es gäbe weiter eine Ordinalzahl α der ersten oder zweiten Zahlklasse, die alle diese α_n majorisiert. Wegen $\alpha < \omega_1$ gäbe es auch ein Element F_α in $\mathfrak{A}$, und F_α enthielte alle Kanten K_n, also die ganze Hülle von $\mathfrak{A}$. Da auch $\alpha + 1 < \omega_1$ wäre, gäbe es weiter ein Element $F_{\alpha+1}$ in $\mathfrak{A}$. F_α müßte ein echter Teil von $F_{\alpha+1}$ sein, $F_{\alpha+1}$ also mindestens eine Kante enthalten, die F_α nicht enthält — im Widerspruch dazu, daß F_α schon die ganze Hülle von $\mathfrak{A}$, insbesondere also auch jede Kante von $F_{\alpha+1}$ enthielt. q. e. d.

Nach Satz 8 ist es insbesondere unmöglich, jeder Ordinalzahl α der ersten und zweiten Zahlklasse einen Fächer F_α mit nur abzählbar vielen A-Wegen so zuzuordnen, daß die Menge $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ geschachtelt ist. Wir formulieren darüber den folgenden Satz, der die „Ursache" dieser Unmöglichkeit noch anders beleuchtet:

Satz 9: *Es sei U ein Fächer, der eine Vollverzweigung enthält, und es sei Y eine Vorschrift, die in Form einer Definition durch transfinite Induktion zu jeder in U geschachtelten Menge $\mathfrak{F}_\beta = \{F_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ mit den unten genannten Eigenschaften a) und b) einen Fächer F_β liefert, der alle F_α aus $\mathfrak{F}_\beta$ als echte Teilfächer enthält und selbst ein echter oder unechter Teil von U ist, — also die Schachtelung „fortsetzt" —:*

a) Jedes F_α besitzt nur abzählbar viele A-Wege,

b) $\mathfrak{F}_\beta$ *ist selbst durch die Durchführung der Vorschrift Y gewonnen.*

Dann gibt es eine Ordinalzahl μ *der ersten oder zweiten Zahlklasse derart, daß* F_μ *eine Vollverzweigung enthält und die in U geschachtelte Fächermenge* $\mathfrak{F}_{\mu+1} = \{F_\alpha\}_{\alpha<\mu+1}$ also die *Bedingung a) verletzt.*

Beweis: Gäbe es kein solches μ, so lieferte Y zu jeder Ordinalzahl α der ersten beiden Zahlklassen eine in U geschachtelte Menge $\mathfrak{F}_\alpha$ mit den Eigenschaften a) und b), insgesamt also infolge b) eine in U geschachtelte nichtabzählbare Menge im Widerspruch zu Satz 8. q. e. d.

Satz 10: *Die Menge der A-Wege in einem Fächer ist entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums. Von der Mächtigkeit des Kontinuums ist sie dann und nur dann, wenn der Fächer eine Vollverzweigung (als echten oder unechten Teilgraphen) enthält; ist das der Fall, so gibt es in dem Fächer eine wohlbestimmte umfassendste Vollverzweigung* V_u *derart, daß jede in dem Fächer enthaltene Vollverzweigung ein (echter oder unechter) Teil der* V_u *ist.*

Beweis: Wenn ein Fächer F nichtabzählbar viele A-Wege enthält, so muß es unter den von A fortgehenden Ästen mindestens einen geben, der gleichfalls nichtabzählbar viele A-Wege enthält. Die Anfangskanten $\overrightarrow{A P_k}$ aller solchen Äste denken wir uns irgendwie markiert. Bei jeder der jetzt markierten Kanten muß es unter den von ihrem Schlußpunkt P_k fortgehenden Ästen jeweils wiederum mindestens einen geben, in den nichtabzählbar viele A-Wege einmünden. Die Anfangskanten aller dieser Äste mögen nunmehr für jeden Schlußpunkt P_k einer vorher markierten Kante auch markiert werden; die von den Schlußpunkten dieser beim letzten Schritt markierten Kanten fortgehenden Äste mögen in gleicher Weise behandelt werden, und so fort. Bei diesem Verfahren bekommt ersichtlich jede markierte Kante mindestens einen markierten Nachfolger und wird auch nur — außer wenn sie bei A beginnt — anschließend an einen markierten Vorgänger markiert. Der aus den markierten Kanten gebildete Teil V_u des Fächers ist daher selbst ein Fächer, der den Anfang A von F enthält und bereits von A aus gerichtet ist, wenn man jeder Kante von V_u die Richtung läßt, die sie in F besaß.

V_u ist eine Vollverzweigung: Die Kante $\overrightarrow{P Q}$ von V_u wurde ja markiert, weil in den Ast $\overrightarrow{P Q}$ von F nichtabzählbar viele A-Wege einmündeten. Enthielte der Ast $\overrightarrow{P Q}$ des markierten Teils V_u nun keinen Gabelungspunkt (n. b. Gabelungspunkt von V_u), so gäbe es nur einen markierten A-P-Q-Weg W, und es würden also in jeden von W hinter P abzweigenden Ast von F nur abzählbar viele A-Wege einmünden. Da mit der Menge aller Äste von F auch die Menge dieser Äste abzählbar ist, gäbe es also nur abzählbar viele von W hinter P abzweigende A-Wege in F, und außer ihnen mündete in den Ast $\overrightarrow{P Q}$ von F nur noch W selbst ein. Die Kante $\overrightarrow{P Q}$ hätte also gar nicht markiert werden dürfen. Folglich gibt es in V_u keine Äste ohne Gabelungspunkte, also keine Ruten, und nach Definition 2a ist daher V_u tatsächlich eine Vollverzweigung.

Enthält endlich F irgendeine Vollverzweigung V', und ist $\overrightarrow{P Q}$ irgendeine ihrer Kanten, so gibt es nichtabzählbar viele A-P-Q-Wege in F. Denn der Ast $\overrightarrow{P Q}$ von V' ist selbst eine Vollverzweigung mit dem Anfang $P = A'$, und jeder A'-Weg dieser Vollverzweigung wird durch Voransetzen des Weges

$A\,P$ zu einem A-Weg von F. Die Kante $\overrightarrow{P\,Q}$ gehört also zu V_u, da nach Konstruktion von V_u der ganze Weg $A \ldots P\,Q$ markiert worden sein muß. Folglich ist die markierte Vollverzweigung V_u die in der Behauptung genannte umfassendste Vollverzweigung.

Die übrigen Behauptungen des Satzes ergeben sich nach diesen Vorbereitungen durch eine auf der Hand liegende Disjunktion von selbst. q. e. d.

Bemerkung: Außer den 2^a A-Wegen der umfassendsten Vollverzweigung V_u gibt es in einem Fächer mit nichtabzählbar vielen A-Wegen nur noch abzählbar viele A-Wege, nämlich die, die in einen der abzählbar vielen Äste einmünden, deren Anfangskanten nicht markiert wurden, weil in jeden von ihnen nur abzählbar viele A-Wege einmündeten.

Hilfssatz 1: Fassen wir den Nullgraphen N als (uneigentlichen) Fächer und als Teil jedes Fächers — also auch als Teil von sich selbst — auf, so gilt: ist $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ eine wohlgeordnete Menge von Fächern, — wobei der Index α des Elementes F_α die Ordinalzahl des durch F_α bestimmten Abschnitts von $\mathfrak{F}$ sein möge —, und ist für $F_\alpha \prec F_\beta$ stets F_β ein Teil von F_α, in dem jede Kante die gleiche Richtung wie in F_α besitzt, so ist der Durchschnitt aller F_α aus $\mathfrak{F}$ wieder ein Fächer.

Beweis: Enthält der Durchschnitt 2 Kanten K_1 und K_2, so gibt es in dem ersten Fächer F_0 von $\mathfrak{F}$ genau einen K_1 mit K_2 verbindenden Weg. Würde eine Kante K dieses Weges nicht zum Durchschnitt gehören, so wäre die Menge der Fächer aus $\mathfrak{F}$, die K nicht enthalten, nicht leer. Ist F_{α_K} eines ihrer Elemente, so enthält F_{α_K} aber die Kanten K_1 und K_2, da sie zum Durchschnitt gehören. Demnach wäre F_{α_K} infolge des Fehlens der Kante K nicht zusammenhängend, denn als Teil von F_0 kann F_{α_K} keinen anderen K_1 mit K_2 verbindenden Weg besitzen als F_0 selbst. Da F_{α_K} aber als Fächer zusammenhängend ist, folgt, daß der Durchschnitt den ganzen K_1 mit K_2 verbindenden Weg aus F_0 enthalten muß und also zusammenhängend ist.

Der Durchschnitt ist entweder der Nullgraph, oder er enthält mindestens eine Kante $\overrightarrow{P\,Q}$ von F_0. Der erste Fall bedarf keiner Untersuchung. Liegt der zweite Fall vor, so mögen in F_0 von Q die n Kanten $\overrightarrow{Q\,R_1}, \ldots, \overrightarrow{Q\,R_n}$ $(n \geqq 1)$ ausgehen. Mindestens eine von ihnen muß gleichfalls zum Durchschnitt gehören. Andernfalls gäbe es nämlich zu jedem $k = 1, \ldots, n$ einen ersten Fächer F_{α_k} in $\mathfrak{F}$, der die Kante $\overrightarrow{Q\,R_k}$ nicht mehr enthält. Unter diesen endlich vielen Fächern gäbe es dann einen letzten F_{α_Q}, und dieser enthielte keine der Kanten $\overrightarrow{Q\,R_1}, \ldots, \overrightarrow{Q\,R_n}$. Da F_{α_Q} aber die Kante $\overrightarrow{P\,Q}$ enthält, die ja zum Durchschnitt gehört, wäre somit Q ein Endpunkt von F_{α_Q}. Der einzige eventuelle Endpunkt A eines Fächers ist aber niemals Schlußpunkt einer gerichteten Kante. Folglich ist der Schlußpunkt Q einer zum Durchschnitt gehörigen Kante $\overrightarrow{P\,Q}$ sicher kein Endpunkt des Durchschnitts.

Wären nun die Anfangspunkte P_1 und P_2 zweier Kanten $\overrightarrow{P_1\,Q_1}$ und $\overrightarrow{P_2\,Q_2}$ Endpunkte des Durchschnitts, so müßte der P_1 mit P_2 verbindende Weg in F_0, der (s. o.) auch zum Durchschnitt gehört, von der Form $P_1\,Q_1\,R_1 \ldots R_2\,Q_2\,P_2$ sein. Infolge der Orientierungen $\overrightarrow{P_1\,Q_1}$ und $\overleftarrow{Q_2\,P_2}$ und

wegen der Vorschriften des Orientierungsverfahrens (s. d.) würde dieser Weg also — als Folge orientierter Kanten geschrieben — von folgender Form sein: $\overrightarrow{P_1 Q_1}, \overrightarrow{Q_1 R_1}, \ldots, \overleftarrow{R_2 Q_2}, \overleftarrow{Q_2 P_2}$. Es müßte daher zwei gerichtete Kanten $\overrightarrow{U_1 W}$ und $\overleftarrow{W U_2}$ mit dem gemeinsamen Schlußpunkt W auf diesem Wege und somit in dem Fächer F_0 geben, während die Vorschriften des Orientierungsverfahrens ohne weiteres erkennen lassen, daß zwei gerichtete Kanten eines gerichteten Fächers wohl einen gemeinsamen Anfangs-, nie aber einen gemeinsamen Schlußpunkt haben können. Folglich kann der Durchschnitt höchstens einen Endpunkt besitzen.

Wenn also der Durchschnitt nicht der uneigentliche Fächer N ist, besitzt er nach Bemerkung 1 zur Formulierung der Beweise alle von einem Fächer geforderten Eigenschaften. q. e. d.

Hilfssatz 2: Werden in einem Fächer F alle diejenigen Äste $\overrightarrow{PQ}$ gestrichen, die nur endlich viele Gabelungspunkte enthalten, so ist der verbleibende Rest wieder ein Fächer, und zwar dann und nur dann der uneigentliche Fächer N (Nullgraph), wenn F selbst nur endlich viele Gabelungspunkte enthielt.

Beweis: Haben alle vom Schlußpunkt Q einer Kante $\overrightarrow{PQ}$ von F fortgehenden Äste nur endlich viele Gabelungspunkte, so gilt wegen des endlichen Grades von Q das gleiche von dem Ast $\overrightarrow{PQ}$ selbst: Q kann daher kein Endpunkt des Restes sein.

Ist eine bei P endende Kante $\overrightarrow{OP}$ in F vorhanden und gehört sie zu einem Ast mit nur endlich vielen Gabelungspunkten, so ist der Ast $\overrightarrow{OP}$ offenbar gleichfalls ein zu streichender Ast: er kann nicht unendlich viele Gabelungspunkte besitzen und Teil eines Astes mit endlich vielen Gabelungspunkten sein. Dieser Ast $\overrightarrow{OP}$ enthält aber jede von P fortgehende Kante $\overrightarrow{PQ}$, die also mitgestrichen wird. Folglich: mit einer Kante $\overrightarrow{PQ}$ enthält der Rest, — wenn $P \neq A$ ist —, auch die Kante $\overrightarrow{OP}$ und daher den ganzen Weg AP. Also ist auch der Anfangspunkt $P \neq A$ einer Kante $\overrightarrow{PQ}$ kein Endpunkt des Restes und der Rest zusammenhängend; er besteht offenbar aus A-Wegen von F, — wenn er nicht der Nullgraph N ist.

Enthält F nur endlich viele Gabelungspunkte, so kann auch jeder von A fortgehende Ast von F nur endlich viele Gabelungspunkte enthalten und wird also gestrichen: der Rest ist der Nullgraph. Besitzt F aber unendlich viele Gabelungspunkte, so muß mindestens einer der endlich vielen von A fortgehenden Äste gleichfalls unendlich viele Gabelungspunkte besitzen und wird also nicht als Ganzes gestrichen. Genauer: ist W einer der nach Satz 1 in F existierenden A-Wege mit unendlich vielen Gabelungspunkten und $\overrightarrow{PQ}$ eine Kante von W, so besitzt auch der Ast $\overrightarrow{PQ}$ unendlich viele Gabelungspunkte. Die Kante $\overrightarrow{PQ}$ gehört also (vgl. vorangehenden Absatz) zu keinem Ast mit nur endlich vielen Gabelungspunkten und damit zum Rest. Folglich gehört jeder A-Weg W mit unendlich vielen Gabelungspunkten zum Rest. (Dieser ist also nicht der Nullgraph.) Ist aber W' ein A-Weg von F mit nur endlich vielen Gabelungspunkten und G_n der letzte Gabelungspunkt von W', so mündet W' bei G_n in eine Rute R von F ein. Da R gestrichen werden muß,

können von W' höchstens die endlich vielen Kanten des Weges AG_n noch dem Rest angehören. q. e. d.

Bemerkung: Die zum Beweise des Hilfssatzes 2 nicht notwendige Ausführlichkeit des letzten Absatzes sollte der Erläuterung der folgenden Definition 4 und einer späteren Anwendung (Ableitungen einer linearen Punktmenge) dienen und erübrigt einen weiteren Beweis für die Bemerkung, daß man im Hilfssatz 2 anstelle der Streichung aller Äste mit nur endlich vielen Gabelungspunkten auch die Streichung aller Kanten, die zu keinem A-Weg mit unendlich vielen Gabelungspunkten gehören, vorschreiben kann: die entstehenden Restfächer sind identisch.

Definition 4: Werden in einem Fächer F alle Äste mit nur endlich vielen Gabelungspunkten gestrichen, so nennen wir den verbleibenden Restfächer den *Verzweigungskern 1. Ordnung von F* und bezeichnen ihn mit $F^{(1)}$. F selbst heiße der Verzweigungskern nullter Ordnung von F: $F = F^{(0)}$. Ist weiter α eine isolierte Ordinalzahl, so verstehen wir unter dem *Verzweigungskern* α-*ter Ordnung von F* — in Zeichen $F^{(\alpha)}$ — den Verzweigungskern 1. Ordnung von $F^{(\alpha-1)}$; ist α eine Limeszahl, so verstehen wir unter $F^{(\alpha)}$ den Durchschnitt aller $F^{(\beta)}$ mit $\beta < \alpha$.

Nach Hilfssatz 1 und 2 ist ein Verzweigungskern beliebiger Ordnung eines Fächers wieder ein Fächer.

Enthält ein Fächer F nur abzählbar viele A-Wege, so ist F keine Vollverzweigung und enthält also Äste mit nur endlich vielen Gabelungspunkten. $F^{(1)}$ ist daher dann ein echter Teil von F. Aus demselben Grunde ist auch $F^{(2)}$ ein echter Teil von $F^{(1)}$, — falls $F^{(1)}$ nicht der Nullgraph ist —, denn $F^{(1)}$ muß wie eben F wegen der Abzählbarkeit seiner A-Wege Äste mit nur endlich vielen Gabelungspunkten enthalten, und da in F alle diese Äste eben gestrichen wurden, müssen durch die Streichungen neue entstanden sein (über das Wie vgl. etwa unten Bew. zu Satz 12), ...; $F^{(\omega_0)}$ ist ein echter Teil jedes $F^{(n)}$, da $F^{(\omega_0)} \subseteq F^{(n+1)} \subset F^{(n)}$ ist, und so fort, solange nicht der Nullgraph auftritt (der ja keinen echten Teil mehr besitzt).

Äste mit nur endlich vielen Gabelungspunkten können andererseits auch in Fächern *mit* einer Vollverzweigung auftreten, — sie gehören nur nicht zur Vollverzweigung.

Dies alles läßt vermuten, daß ein gegebener Fächer durch die sukzessive Bildung der Verzweigungskerne entweder zum Nullgraphen abgebaut wird, oder daß sich dabei eine Vollverzweigung herausschält.

In der Tat gilt der

Satz 11: *Ist F ein Fächer mit nur abzählbar vielen A-Wegen, so gibt es eine kleinste Ordinalzahl α der ersten oder zweiten Zahlklasse derart, daß $F^{(\alpha)}$ der Nullgraph N ist. Ist F ein Fächer mit nichtabzählbar vielen A-Wegen, so gibt es eine kleinste Ordinalzahl α der ersten oder zweiten Zahlklasse derart, daß $F^{(\alpha)}$ die umfassendste in F enthaltene Vollverzweigung V_n (vgl. Satz 10) ist.*

Beweis: 1. Es sei F ein Fächer mit nur abzählbar vielen A-Wegen. Sind es endlich viele, so enthält F auch nur endlich viele Gabelungspunkte, so daß $\alpha = 1$ offenbar die behauptete Eigenschaft hat. Sind es aber unendlich viele, so genügt es zu zeigen, daß es überhaupt ein α der ersten oder zweiten Zahlklasse gibt, für das $F^{(\alpha)} = N$ ist. Die übliche Wohlordnung der Ordinalzahlen nach ihrer Größe garantiert dann die Existenz eines kleinsten derartigen α in einer dieser Zahlklassen.

Wenn wir jetzt sagen werden, daß $F^{(\alpha)}$ einen A-Weg W von F nicht mehr enthält, so ist damit der Tatbestand gemeint, daß W in F in einen Ast einmündet, der nicht mehr zu $F^{(\alpha)}$ gehört. (Ein endliches Anfangsstück von W kann also sehr wohl noch zu $F^{(\alpha)}$ gehören.)

Wir denken uns nun die Menge der A-Wege von F abgezählt: $W_1, W_2, \ldots$. Gibt es zu jedem n ein α_n der ersten oder zweiten Zahlklasse derart, daß $F^{(\alpha_n)}$ den A-Weg W_n nicht mehr enthält, und ist α eine die α_n majorisierende Ordinalzahl der ersten oder zweiten Zahlklasse, so ist $F^{(\alpha)}$ ein Fächer, der keinen A-Weg von F, also als Teil von F überhaupt keinen A-Weg enthält und mithin der Nullgraph ist.

Wir zeigen zunächst: wenn ein Fächer F mit nur abzählbar vielen A-Wegen einen A-Weg W besitzt, der für alle α der ersten und zweiten Zahlklasse noch in $F^{(\alpha)}$ enthalten ist, dann besitzt F mindestens noch einen zweiten gleichartigen A-Weg W'. Gäbe es nämlich zu jedem der abzählbar vielen von W verschiedenen A-Wege W_n ein α_n der ersten oder zweiten Zahlklasse derart, daß $F^{(\alpha_n)}$ den A-Weg W_n nicht mehr enthält, so gäbe es wieder eine diese α_n majorisierende Ordinalzahl α in einer dieser Zahlklassen derart, daß $F^{(\alpha)}$ keinen dieser von W verschiedenen A-Wege, also höchstens noch W selbst enthält. Ist $A\vec{Q}$ die erste Kante von W in F, so besitzt also der Ast $\overrightarrow{AQ}$ in $F^{(\alpha)}$ keinen Gabelungspunkt, und folglich kann W spätestens in $F^{(\alpha+1)}$ nicht mehr enthalten sein, obwohl mit α auch $\alpha + 1$ der ersten bzw. zweiten Zahlklasse angehört.

Man kann nun weiter schließen: W und W' besitzen einen letzten gemeinsamen Knotenpunkt P derart, daß W und W' in verschiedene von P fortgehende Äste $\overrightarrow{PQ}$ bzw. $\overrightarrow{PQ'}$ einmünden. (Natürlich kann $P = A$ sein.) Der Ast $\overrightarrow{PQ}$ ist seinerseits wieder ein Fächer F_Q. P spielt für F_Q die Rolle des Anfangs A. F_Q besitzt nur abzählbar viele A-Wege, und zwar die A-P-Q-Wege von F vermindert um den Weg $A\,P$. Der A-Weg W (ohne das Anfangsstück $A\,P$) ist auch für F_Q ein A-Weg, der für jedes α der ersten beiden Zahlklassen in $F_Q^{(\alpha)}$ enthalten ist, — sonst hätte er auch als A-Weg von F nicht diese Eigenschaft gehabt. Folglich muß nach dem eben bewiesenen auch F_Q zwei solche ausgezeichnete A-Wege enthalten, die nun, da F_Q in P einen Endpunkt hat, beide P-Q-Wege sind, und sich also erst hinter P trennen. Analoges gilt für den Ast $\overrightarrow{PQ'}$. Somit: Jeder der beiden ausgezeichneten A-Wege W und W', die sich bei P getrennt hatten, gabelt sich hinter P wieder in zwei ausgezeichnete A-Wege, deren jeder sich nach den gleichen Überlegungen wieder in A-Wege mit der gleichen Eigenschaft gabeln muß, und so fort.

Wenn also F überhaupt A-Wege der in Rede stehenden Art besäße, enthielte F eine ganze aus solchen A-Wegen gebildete Vollverzweigung und damit entgegen der Voraussetzung nichtabzählbar viele A-Wege. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

2. Es sei F ein Fächer mit nichtabzählbar vielen A-Wegen und V_u die nach Satz 10 in F enthaltene umfassendste Vollverzweigung. Ist $\overrightarrow{PQ}$ ein Ast von F, dessen Anfangskante $\overrightarrow{PQ}$ nicht zu V_u gehört, so münden in diesen Ast nur abzählbar viele A-Wege von F ein. Ein solcher Ast ist also zugleich ein Fächer, auf den wir den eben bewiesenen ersten Teil des Satzes anwenden

können. Danach gehört zu jedem dieser Äste ein α der ersten oder zweiten Zahlklasse derart, daß der Verzweigungskern α-ter Ordnung des betreffenden Astes der Nullgraph ist. Da nun F (weil sogar die Menge aller Äste eines Fächers abzählbar ist) nur abzählbar viele solche Äste enthält, existiert ein α_0 in der ersten oder zweiten Zahlklasse, das alle diese α majorisiert. $F^{(\alpha_0)}$ enthält also höchstens noch Kanten von V_u. Da andererseits jede Kante von V_u Anfangskante eines Astes $\overrightarrow{PQ}$ von V_u mit unendlich vielen Gabelungspunkten von V_u ist, zeigt eine triviale transfinite Induktion, daß ein Verzweigungskern beliebig hoher Ordnung von F die unversehrte Vollverzweigung V_u enthalten muß. q. e. d.

Satz 12: *Ein Fächer F, für den die kleinste Ordinalzahl α mit $F^{(\alpha)} = N$ (Nullgraph) oder $= V$ (Vollverzweigung) größer als 1 ist, besitzt unendlich viele Ruten.*

Beweis: $F^{(1)}$ ist nach Voraussetzung weder der Nullgraph noch eine Vollverzweigung, besitzt also mindestens eine Rute R. Der in R einmündende A-Weg W muß in F selbst unendlich viele Gabelungspunkte bessesen haben, denn wäre er bereits in F in eine Rute eingemündet, so wäre diese bei der Bildung von $F^{(1)}$ gestrichen worden, und W wäre in $F^{(1)}$ gar nicht vorhanden. Die in den Gabelungspunkten von W in F von W abzweigenden Äste müssen also bei der Bildung von $F^{(1)}$ fast alle gestrichen worden sein, — sonst wäre ja R nicht entstanden. Diese unendlich vielen gestrichenen Äste von F besaßen also jeder nur endlich viele Gabelungspunkte. Jeder der unendlich vielen in einen dieser gestrichenen Äste einmündenden A-Wege von F kann also auch nur endlich viele Gabelungspunkte besessen haben und mündete folglich in eine Rute von F ein. q. e. d.

Satz 13: *1. Ist F_a ein Fächer mit nur abzählbar vielen A-Wegen, so ist die kleinste Ordinalzahl α, für die $F_a^{(\alpha)}$ der Nullgraph ist, eine isolierte Ordinalzahl. 2. Umgekehrt gibt es zu jeder isolierten Ordinalzahl α der ersten oder zweiten Zahlklasse einen Fächer $F_{a,\alpha}$ derart, daß α die kleinste Ordinalzahl mit $F_{a,\alpha}^{(\alpha)} = N$ (Nullgraph) ist. 3. Für Fächer F_V mit nichtabzählbar vielen A-Wegen, — also mit einer umfassendsten Vollverzweigung V_u —, gilt diese Einschränkung nicht: es gibt zu jedem α der ersten oder zweiten Zahlklasse und zu jeder Vollverzweigung V einen Fächer $F_{V,\alpha}$ derart, daß α die kleinste Ordinalzahl mit $F_{V,\alpha}^{(\alpha)} = V$ ist; V ist zugleich die umfassendste Vollverzweigung V_u von $F_{V,\alpha}$.*

Beweis: 1. Es sei α eine Limeszahl und $F_a^{(\beta)} \neq N$ für $\beta < \alpha$. Es ist zu zeigen, daß dann auch $F_a^{(\alpha)}$ nicht der Nullgraph ist. In F_a mögen von A die Kanten $\overrightarrow{AP_1}, \ldots, \overrightarrow{AP_n}$ ausgehen. Gäbe es für $k = 1, \ldots, n$ je ein $\beta_k < \alpha$ derart, daß in $F_a^{(\beta_k)}$ ein Ast $\overrightarrow{AP_k}$ entweder überhaupt nicht existiert oder nur endlich viele Gabelungspunkte besitzt, so gäbe es unter diesen endlich vielen β_k ein größtes: $\beta_P < \alpha$. In $F_a^{(\beta_P)}$ besäße dann jeder Ast $\overrightarrow{AP_k}$, — wenn er überhaupt existiert —, nur endlich viele Gabelungspunkte. Folglich wäre $F_a^{(\beta_P + 1)}$ der Nullgraph, obwohl mit β_P auch $\beta_P + 1 < \alpha$ wäre. Es gibt daher mindestens eine Kante $\overrightarrow{AP}$ in F_a derart, daß für jedes $\beta < \alpha$ $F_a^{(\beta)}$ einen Ast $\overrightarrow{AP}$ und insbesondere also die Kante AP enthält: $F_a^{(\alpha)}$ muß daher als Durchschnitt aller $F_a^{(\beta)}$ mit $\beta < \alpha$ auch diese Kante enthalten und kann also nicht der

Nullgraph sein. (Durch Iteration dieses Schlusses zu einer vollständigen Induktion und die Vorschrift, bei jedem Schritt alle derartigen Kanten zu erfassen, erhält man alle A-Wege von $F_a^{(\alpha)}$, wodurch noch einmal deutlich wird, daß und warum $F_a^{(\alpha)}$ ein Fächer ist.)

2. a) Ist $\alpha = 0$, und wählen wir für F_a den Nullgraphen, so ist $F_a^{(0)}$ der Nullgraph, also α die kleinste Ordinalzahl, für die $F_a^{(\alpha)}$ der Nullgraph ist.

b) Ist $\alpha = 1$, so können wir für F_a z. B. einen Fächer $F_{a,1}$ wählen, der nur aus einer Rute besteht: $F_{a,1}^{(0)} = F_{a,1}$ ist nicht der Nullgraph, wohl aber $F_{a,1}^{(1)}$.

c) Ist $\alpha - 1$ eine isolierte Ordinalzahl der ersten oder zweiten Zahlklasse, und gibt es einen Fächer $F_{a,\alpha-1}$, der zu $\alpha - 1$ das in der Behauptung genannte Verhältnis hat, so können wir einen Fächer $F_{a,\alpha}$, der zu α in dem gleichen Verhältnis steht, folgendermaßen finden: wir denken uns eine abgezählte Folge von solchen Fächern $F_{a,\alpha-1}$ mit den Anfängen $A_1, A_2, \ldots$ gegeben. Aus diesen zunächst getrennt zu denkenden Fächern bilden wir einen einzigen Fächer durch Einfügen von Kanten $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \ldots$. A_1 ist der Anfang A dieses zusammengesetzten Fächers $F_{a,\alpha}$. Bei der Bildung des Verzweigungskerns $F_{a,\alpha}^{(\alpha-1)}$ sind offenbar gerade die an den Knotenpunkten A_n des A-Weges $W = A_1A_2 \ldots A_n \ldots$ von $F_{a,\alpha}$ angesetzten Fächer $F_{a,\alpha-1}$ zu Nullgraphen abgebaut, und nur W ist übriggeblieben: $F_{a,\alpha}^{(\alpha)}$ ist der Nullgraph, $F_{a,\alpha}^{(\alpha-1)}$ aber noch nicht.

d) Ist schließlich $\alpha - 1$ eine Limeszahl der zweiten Zahlklasse, so konstruieren wir $F_{a,\alpha}$ folgendermaßen: es gibt abzählbar unendlich viele isolierte Ordinalzahlen $\beta < \alpha - 1$. Gibt es zu jedem solchen β einen Fächer $F_{a,\beta}$ mit der in Rede stehenden Eigenschaft, so denken wir uns diese β abgezählt, zu jedem von ihnen einen Fächer $F_{a,\beta}$ gewählt und deren Anfänge $A_1, A_2, \ldots$ gleichfalls abgezählt. Wie in c) verbinden wir diese zunächst getrennt zu denkenden Fächer durch Kanten $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \ldots$ zu einem einzigen Fächer $F_{a,\alpha}$ mit dem Anfang A_1. Dann besteht $F_{a,\alpha}^{(\alpha-1)}$ nur aus dem A-Wege $W = A_1A_2 \ldots A_n \ldots$. Denn einerseits gehört jeder von W abzweigende Ast $\overrightarrow{A_nP}$ ja zu einem Fächer $F_{a,\beta}$, der schon bei der Bildung des Verzweigungskerns der Ordnung $\beta < \alpha - 1$ zum Nullgraphen abgebaut war, andererseits zweigen für jedes $\mu < \alpha - 1$ in $F_{a,\alpha}^{(\mu)}$ immer noch unendlich viele Äste von W ab, da ja die Ordinalzahlen $\mu + 1, \mu + 2, \ldots < \alpha - 1$ sind ohne Limeszahlen zu sein, und die an W angesetzten Fächer $F_{a,\mu+n}$ in $F_{a,\alpha}^{(\mu)}$ also noch nicht zu Nullgraphen abgebaut sind: W gehört daher zu jedem $F_{a,\alpha}^{(\mu)}$ mit $\mu < \alpha - 1$ und damit zu deren Durchschnitt $F_{a,\alpha}^{(\alpha-1)}$.

e) Mit b), c) und d) sind die Bausteine einer nunmehr auf der Hand liegenden transfiniten Induktion im Rahmen der ersten beiden Zahlklassen gegeben, die den zweiten Teil des Satzes beweist: aus b) und c) folgt die Existenz der $F_{a,\alpha}$ für $\alpha = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, und daraus folgt sie nach d) für $\alpha = \omega_0 + 1$, und so weiter.

3. Es sei V irgendeine Vollverzweigung.

a) α_0 sei eine isolierte Ordinalzahl der ersten oder zweiten Zahlklasse, F_{a,α_0} ein zu α_0 gehöriger Fächer gemäß 2., A_F sein Anfang und P irgendein

Knotenpunkt von V. Die zunächst getrennt zu denkenden Fächer V und F_{a,α_0} verbinden wir durch eine neue Kante $\overrightarrow{PA_F}$ zu einem einzigen Fächer F_{V,α_0}. Der Ast $\overrightarrow{PA_F}$ von F_{V,α_0} ist dann offenbar bei α_0, aber nicht früher zum Nullgraphen abgebaut, F_{V,α_0} genügt also der Behauptung des Satzes.

b) α_0 sei eine Limeszahl der zweiten Zahlklasse, $\mathfrak{F} = \{F_{a,\beta}\}$ sei analog 2. d) eine abgezählte Menge von Fächern, in der es zu jedem $\beta < \alpha_0$, das nicht Limeszahl ist, einen gemäß 2. zu β gehörigen Fächer $F_{a,\beta}$ gibt, $A_1, A_2, \ldots$ seien die Anfänge dieser Fächer und $P_1, P_2, \ldots$ sei eine Abzählung der Knotenpunkte von V. Wir fügen nun die zunächst voneinander und von V getrennt zu denkenden Fächer von $\mathfrak{F}$ mit der Vollverzweigung V durch Einführung von Kanten $\overrightarrow{P_1 A_1}, \overrightarrow{P_2, A_2}, \ldots$ zu einem einzigen Fächer F_{V,α_0} zusammen. Indem man in 2. d) V anstatt W und α_0 anstatt $\alpha - 1$ liest, kann man fast wörtlich wie dort erkennen, daß $F^{(\alpha)}_{V,\alpha_0} = V$ für $\alpha = \alpha_0$, aber nicht vorher gilt. q. e. d.

Anwendungen auf lineare Punktmengen.

Es sei $p > 1$ eine natürliche Zahl, und es bedeute V_p wieder (vgl. „Bezeichnung“ nach Satz 3) eine Vollverzweigung, in der A von p-tem Grade und jeder weitere Knotenpunkt von $(p+1)$-tem Grade ist. In V_p sind dann alle Knotenpunkte P Gabelungspunkte, von denen p Kanten $\overrightarrow{PQ_0}, \overrightarrow{PQ_1}, \ldots, \overrightarrow{PQ_{p-1}}$ fortgehen, die wir uns dementsprechend mit $0, 1, \ldots, (p-1)$ beziffert denken.

Zur Erleichterung einer anschaulichen Vorstellung und der Ausdrucksweise kann man sich V_p o. B. d. A. so in eine Ebene eingebettet denken, daß ein genügend kleiner Kreis um P die in P zusammenstoßenden Kanten bei jedem P in der Reihenfolge $0, \ldots, (p-1)$, $\overrightarrow{OP}$ schneidet (— bei $P = A$ existiert keine Kante $\overrightarrow{OA}$ —), wenn man ihn von seinem Schnittpunkt mit $\overrightarrow{PQ_0}$ aus im mathematisch negativen Sinne durchläuft:

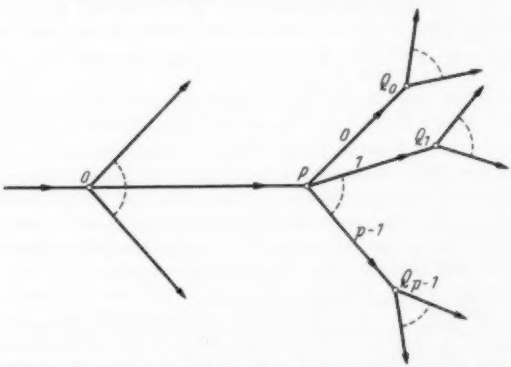

Fig. 1. Einbettung der V_p in die Ebene. (Zur Wahl des Durchlaufungssinnes vgl. später (a)).

(Z) Die Kanten eines A-Weges von V_p stellen so, wie sie in V_p aufeinanderfolgen, eine Kantenfolge (K_n) dar. Ersetzen wir in (K_n) jedes Glied K_n durch die Ziffer a_n, die K_n in V_p trägt, so entsteht eine Ziffernfolge (a_n) mit

$0 \leqq a_n \leqq p - 1$, und jedem A-Weg von V_p läßt sich somit in Gestalt des p-adischen Bruches $0, a_1 a_2 \ldots$ eindeutig eine reelle Zahl x zuordnen, für die $0 \leqq x \leqq 1$ ist. Da in V_p bei jedem Knotenpunkt P, der von A die Entfernung $n - 1$ hat, genau eine mit a_n $(0 \leqq a_n \leqq p - 1)$ bezifferte Kante zur Verfügung steht, gibt es umgekehrt zu jedem p-adischen Bruch der Form $0, a_1, a_2 \ldots$ genau einen A-Weg in V_p, dem dieser p-adische Bruch im eben genannten Sinne zugeordnet ist.

Wegen der bekannten Nichteindeutigkeit der p-adischen Schreibweise für reelle Zahlen ist die damit gegebene Zuordnung zwischen A-Wegen von V_p und reellen Zahlen $0 \leqq x \leqq 1$ nur in der Richtung A-Weg $\rightarrow x$ eindeutig. Die abzählbar unendlich vielen Zweideutigkeiten in der Richtung $x \rightarrow A$-Weg sind zwar klar zu übersehen, bedingen aber häufige Fallunterscheidungen und Zusatzbestimmungen.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

Es seien W_1 und W_2 zwei A-Wege von V_p, und W_2 möge im Gabelungspunkt P von W_1 abzweigen. (Es darf $P = A$ sein.) Die Anfangskante $\overrightarrow{PQ}$ des Astes $\overrightarrow{PQ}$, in den W_2 dabei einmündet, möge eine größere Ziffer tragen als die Anfangskante $\overrightarrow{PR}$ des Astes $\overrightarrow{PR}$, in den W_1 hinter P einmündet; wir sagen dann: W_2 liegt *rechts* von W_1, bzw. W_1 liegt (oder verläuft usw.) *links* von W_2;

liegt W rechts von W_1, aber links von W_2 (— notwendig ist dazu: W_1 liegt links von W_2 —), dann sagen wir: W liegt *zwischen* W_1 und W_2;

gibt es keinen A-Weg W, der zwischen W_1 und W_2 liegt, liegt aber W_1 links von W_2, so nennen wir W_1 und W_2 *Nachbarn* oder *benachbart* und bezeichnen auch W_1 als den *linken* Nachbar von W_2 und W_2 als den *rechten* Nachbar von W_1.

Demnach sind zwei A-Wege dann und nur dann benachbart, wenn sie erstens bei ihrem letzten gemeinsamen Gabelungspunkt P in Äste $\overrightarrow{PQ_k}$ und $\overrightarrow{PQ_{k+1}}$ einmünden, deren Anfangskanten nur um 1 verschiedene Ziffern tragen: $\overrightarrow{PQ_k} \sim k$, $\overrightarrow{PQ_{k+1}} \sim k + 1$, und wenn zweitens der A-Weg, der die Kante $\overrightarrow{PQ_k}$ wählt, hinter Q_k ausnahmslos Kanten mit der Ziffer $p - 1$ aufweist, so daß hinter P kein A-Weg nach rechts von ihm abzweigen kann —, während der A-Weg, der die Kante $\overrightarrow{PQ_{k+1}}$ wählt, hinter Q_{k+1} ausnahmslos Kanten mit der Ziffer 0 enthält, so daß hinter P kein A-Weg nach links von ihm abzweigen kann. Es gibt also insbesondere zu jedem A-Weg höchstens einen Nachbar und insgesamt abzählbar unendlich viele Paare von Nachbarn, da es in jedem der abzählbar unendlich vielen Knotenpunkte von V_p $p - 1$ Möglichkeiten zur Bildung von Nachbarpaaren gibt.

Aus (Z) läßt sich nun direkt ablesen:

(a) Sind W_1 und x_1 einerseits und W_2 und x_2 andererseits einander durch (Z) zugeordnet, so gilt:

sind W_1 und W_2 benachbart, so ist $x_1 = x_2$;
sind W_1 und W_2 nicht benachbart, so ist $x_1 \neq x_2$;
liegt W_1 links von W_2, so ist $x_1 \leqq x_2$;
liegt W_1 links von W_2, ohne mit W_2 benachbart zu sein, so ist $x_1 < x_2$;
ist $x_1 = x_2$, so sind W_1 und W_2 entweder identisch oder benachbart;

ist $x_1 \neq x_2$, so sind W_1 und W_2 weder identisch noch benachbart;

ist $x_1 < x_2$, so liegt W_1 links von W_2 und ist mit W_2 nicht benachbart; und allgemeiner ausgedrückt:

jedem Paar benachbarter A-Wege entspricht genau eine (rationale) Zahl, die sich als „abbrechender" p-adischer Bruch schreiben läßt, und umgekehrt; jedem A-Weg, zu dem kein Nachbar existiert, entspricht genau eine Zahl, die sich nicht als abbrechender p-adischer Bruch schreiben läßt, und umgekehrt.

(a) läßt sich ergänzen durch

(a′) Ist $x_1 < x_2$, und sind x_1 und W_1 einerseits und x_2 und W_2 andererseits einander durch (Z) zugeordnet, so entsprechen einander vermöge (Z) auch: das abgeschlossene Intervall $\langle x_1, x_2 \rangle$ und die Menge alle A-Wege zwischen W_1 und W_2 zuzüglich dieser A-Wege W_1 und W_2 selbst.

Beweis zu (a′): Nach (a) liegt W_1 links von W_2. Liegt W zwischen W_1 und W_2, hier also rechts von W_1 und links von W_2, und ist W vermöge (Z) die reelle Zahl x zugeordnet, so ist nach (a) $x_1 \leqq x \leqq x_2$. Ist umgekehrt $x_1 < x < x_2$ und ist W vermöge (Z) dem x zugeordnet, so liegt — wieder nach (a) — W_1 links von W und W_2 rechts von W, also W zwischen W_1 und W_2.

(ZF) Jedem Fächer F, der ein Teil von V_p ist und den Anfang A von V_p enthält, entspricht vermöge der Zuordnung (Z), — wenn man die Einbettung von F in V_p beachtet, d. h. jeden A-Weg von F zugleich als wohlbestimmten A-Weg von V_p auffaßt —, eine wohlbestimmte Menge $R = \{x\}$ reeller Zahlen $0 \leqq x \leqq 1$.

Bedenkt man nun, daß das Übereinstimmen zweier A-Wege in den ersten n-Kanten die Übereinstimmung der zugeordneten p-adischen Brüche in den ersten n-Ziffern bedeutet, und umgekehrt, so schließt man sehr leicht auf (b) und (b′):

(b) Jeder A-Weg W von F mit unendlich vielen Gabelungspunkten ist Bild eines Häufungspunktes von R. (Unter den unendlich vielen von W abzweigenden A-Wegen kann höchstens einer Nachbar von W sein, — d. h. dasselbe Bild in R haben wie W —, und die übrigen von diesen A-Wegen können auch nur paarweise benachbart sein: zu den unendlich vielen von W abzweigenden A-Wegen gibt es also unendlich viele verschiedene Bilder in R, die sich im Bilde von W häufen.) Ein A-Weg W von F mit nur endlich vielen Gabelungspunkten ist gleichfalls Bild eines Häufungspunktes von R, wenn er in V_p einen Nachbar besitzt, der auch zu F gehört und in F unendlich viele Gabelungspunkte besitzt. In jedem anderen Falle — d. i. also, wenn entweder kein Nachbar von W in V_p existiert, oder, falls er existiert, nicht zu F gehört, oder, falls er zu F gehört, in F auch nur endlich viele Gabelungspunkte besitzt —, ist das Bild eines A-Weges von F mit nur endlich vielen Gabelungspunkten ein isolierter Punkt von R;

(b′) zu jedem Häufungspunkt x von R gibt es in F einen A-Weg W mit unendlich vielen Gabelungspunkten, dessen Bild x ist. (Besitzt W in V_p einen Nachbar, und gehört dieser gleichfalls zu F, so braucht er nicht notwendig auch unendlich viele Gabelungspunkte zu haben.) Ein isolierter Punkt von R ist einem oder zwei A-Wegen von F zugeordnet, die nur endlich viele Gabelungspunkte besitzen.

Der Beweis zu (b) ist in (b) selbst und in der Vorbemerkung zu (b) genügend angedeutet. Ein Beweis zu (b′) kann bequem auch aus dem Absatz oberhalb (d) herausgelesen werden.

(b′) bedeutet:

(c) Die Menge R *der* reellen Zahlen $0 \leqq x \leqq 1$, die den A-Wegen eines als Teil von V_p gegebenen Fächers F (— der A von V_p enthält —) im Sinne von (ZF) zugeordnet sind, ist abgeschlossen.

(ZX) Ist umgekehrt eine Menge $M = \{x\}$ reeller Zahlen $0 \leqq x \leqq 1$ gegeben, so denken wir uns zunächst jedes x aus M als nichtabbrechenden p-adischen Bruch geschrieben und dann in V_p jeden A-Weg markiert, der einem dieser p-adischen Brüche entspricht: der markierte Teil F von V_p ist dann ein Fächer, der A von V_p enthält.

Beweis zu (ZX): Da jede markierte Kante von F einem A-Weg von V_p angehört, und da jeder A-Weg von V_p ein Teilfächer von V_p ist, der den Anfang von V_p enthält, folgt die Behauptung sofort aus Satz 6.

Die gemäß (ZF) diesem Fächer F entsprechende Menge R ist nach (c) abgeschlossen, also $R \supseteq M$. War M selbst abgeschlossen, so wird man hoffen: $R \equiv M$. Das ist in der Tat richtig: Die Kanten eines A-Weges W von F wurden ja markiert, weil sie in A-Wegen mit zugeordnetem x aus M vorkamen. Hätte W kein Bild in M, so müßte jeder A-Weg mit Bild in M, der Kanten von W enthält, nach — von A aus gezählt — endlich vielen Kanten von W abzweigen. Es wären also unendlich viele solche A-Wege nötig, um alle Kanten von W zu markieren und die Bilder dieser A-Wege würden sich auf der reellen Achse im Bilde von W häufen (vgl. (b)). Dieses müßte wegen der Abgeschlossenheit von M also doch zu M gehören.

Hieraus ergibt sich einerseits

(d) Zu jeder abgeschlossenen Menge $M = \{x\}$ reeller Zahlen $0 \leqq x \leqq 1$ gibt es einen Teilfächer F von V_p derart, daß jedem A-Weg von F genau ein x aus M und jedem x aus M mindestens ein A-Weg von F (und höchstens zwei) zugeordnet ist. F kann nach der Vorschrift (ZX) oder nach den Vorschriften (ZX) und (ZX') (s. u.) konstruiert werden. Wird dann wieder gemäß (ZF) die Menge R zu F gebildet, so ist $R = M$. Zwischen F und M gelten (b) und (b′);

und andererseits, indem man in der Herleitung von (d) die Voraussetzung der Abgeschlossenheit von M außer acht läßt,

(e) Ist M nicht abgeschlossen, F der gemäß (ZX) zu M gehörige Fächer und W ein A-Weg von F, dem kein x aus M entspricht, so besitzt W unendlich viele Gabelungspunkte und entspricht einem Häufungspunkt von M.

Da ein A-Weg von F nur entweder ein Bild in M haben kann oder nicht, folgt aus (b), (e) und (d):

(f) Ist F der gemäß (ZX) zu einer beliebig gegebenen Menge $M = \{x\}$, $0 \leqq x \leqq 1$, gehörige Teilfächer von V_p und W ein A-Weg von F mit unendlich vielen Gabelungspunkten, so entspricht W ein Häufungspunkt von M; bildet man zu F gemäß (ZF) die Menge R, so ist $R = M + M'$ die abgeschlossene Hülle von M.

Jetzt sieht man leicht:

(g) Bildet man zu irgendeiner Menge M reeller Zahlen $0 \leqq x \leqq 1$ gemäß (ZX) einen Fächer F, zu diesem den Verzweigungskern α-ter Ordnung $F^{(\alpha)}$ und zu diesem wieder gemäß (ZF) die Menge R, so ist $R = M^{(\alpha)}$ die Ableitung α-ter Ordnung von M.

Beweis zu (g): $F^{(\alpha)}$ entsteht durch sukzessives Streichen der jeweils vorhandenen Äste mit nur endlich vielen Gabelungspunkten; da in solche Äste ausschließlich A-Wege mit nur endlich vielen Gabelungspunkten einmünden

können, sind diese Streichungen nach (b) und (b') gerade gleichbedeutend mit dem sukzessiven Entfernen der jeweils vorhandenen isolierten Punkte, also mit der Bildung von $M^{(\alpha)}$, — wenn sich dabei $F^{(1)}$ und M' entsprechen. Das zeigt aber gerade (f), wenn man die eben gemachte Überlegung auf $\alpha = 1$ anwendet.

Es ist unmöglich, (ZX) durch eine Vorschrift zu ersetzen, die Eineindeutigkeit der Abbildung $M \leftrightarrow F$ erzielt, wenn man nicht überhaupt die Zuordnungsidee Kantenfolge $\leftrightarrow$ p-adischer Bruch aufgeben will: wählt man nämlich als M z. B. die Menge aller reellen Zahlen $0 \leq x \leq 1$, so ist notwendig $F = V_p$ und enthält also benachbarte A-Wege. Gewisse dieser durch (ZX) in (d) möglicherweise bestehenden Zweideutigkeiten sind aber vermeidbar; daß der rechte von zwei markierten Nachbarwegen nur endlich viele Gabelungspunkte besitzt, kann nicht vorkommen. Denn die Vorschrift in (ZX), die Elemente x von M zunächst als nichtabbrechende p-adische Brüche zu schreiben und dann die diesen Brüchen entsprechenden A-Wege zu markieren, bedeutet ja, daß von zwei Nachbarwegen immer nur der linke markiert wird. Der rechte Nachbar ist also nur markiert, wenn alle seine Kanten im Verlauf der Markierung anderer A-Wege markiert wurden. Dabei bekommt er aber unendlich viele Gabelungspunkte, da jeder dieser anderen A-Wege nach endlich vielen Kanten von ihm abzweigen muß. Haben beide Nachbarwege unendlich vieleGabelungspunkte, so muß die Zweideutigkeit in Kauf genommen werden (vgl. u. Abs. nach (ZX')). In dem noch verbleibenden Falle kann man von der Zusatzvorschrift Gebrauch machen:

(ZX') Ist einer abgeschlossenen Menge M gemäß (ZX) ein Fächer F zugeordnet, und enthält F zwei benachbarte A-Wege W_l und W_r von V_p derart, daß der rechte Nachbar W_r unendlich viele, der linke Nachbar W_l aber nur endlich viele Gabelungspunkte von F enthält, und ist P der letzte Gabelungspunkt von W_l, so streichen wir in F die Rute $\overrightarrow{PQ}$, in die W_l einmündet. Ist diese Vorschrift auf alle in Frage kommenden Ruten von F angewandt worden, so ist der verbleibende Rest wieder ein Fächer, und dieser besitzt nunmehr keine Ruten, die durch eine erneute Anwendung dieser Vorschrift (ZX') entfernt werden könnten. (Daß dem Rest dann vermöge (ZF) wieder die gegebene Menge M entspricht, ist selbstverständlich, da ja der die gleiche Zahl wie W_l repräsentierende rechte Nachbar W_r jeweils im Rest verbleibt.)

Beweis zu (ZX'): (Der Hilfssatz 2 ist hier nicht ohne weiteres anwendbar, da hier ein anderer — wenn auch ähnlich scheinender — Streichungsprozeß vorgenommen wurde als dort.) Sind W_l, W_r und W'_l, W'_r zwei Paare benachbarter A-Wege, und liegt W_l links von W'_l, so verläuft nach der Nachbarschaftsdefinition W_r zwischen W_l und W'_l. Gehen in einem gemäß (ZX) konstruierten Fächer F vom Punkte P zwei gemäß (ZX') zu streichende Ruten W_l und W'_l fort, so muß danach der in F verbleibende A-Weg W_r auch ein A-P-Weg sein, so daß durch die Streichungen gemäß (ZX') $P \neq A$ kein Endpunkt werden und A nicht verloren gehen kann. Zugleich sichert das Verbleiben dieser A-P-Wege W_r den Zusammenhang des Restes, der folglich ein Fächer ist. Weiter kann ein A-Weg W von F, der unendlich viele Gabelungspunkte enthält, durch diese Streichungen nicht in einen A-Weg mit nur endlich vielen Gabelungspunkten verwandelt werden: gibt es nämlich überhaupt unendlich viele von W abzweigende Ruten, die in ihrer Eigenschaft als linke Nachbarn zu streichen sind, so gibt es unter ihnen auch

unendlich viele, die alle links oder alle rechts von W liegen. Sind nun W_l und W'_l zwei solche von W nach der gleichen Seite abzweigende Ruten, und liegt etwa W_l links von W'_l, — wir übertragen hier die für A-Wege erklärten Bezeichnungen ohne Befürchtung von Mißverständnissen auf die Ruten, in die die A-Wege einmünden —, so muß offenbar der zwischen ihnen verlaufende und im Rest verbleibende rechte Nachbar W_r von W_l zwischen den Abzweigungspunkten von W_l und W'_l oder in einem dieser Abzweigungspunkte gleichfalls von W abzweigen, — eben weil er zwischen W_l und W'_l verläuft. Aus der Existenz unendlich vieler nach der gleichen Seite von W abzweigenden und zu streichenden Ruten folgt danach sofort die Existenz unendlich vieler Gabelungspunkte von W im Rest, nämlich der Abzweigungspunkte solcher rechten Nachbarn. Denn da von einem Gabelungspunkt nur endlich viele Ruten fortgehen können, muß W unendlich viele Abzweigungspunkte von auf der gleichen Seite von W liegenden und zu streichenden Ruten haben. Sind G_1 und G'_1 irgend zwei von ihnen, so liegt also einerseits auf dem Wege $G_1 G'_1$ ein Abzweigungspunkt eines im Rest verbleibenden rechten Nachbarn, andererseits gibt es aber zwei weitere Punkte G_2 und G'_2 derart, daß die Wege $G_1 G'_1$ und $G_2 G'_2$ keinen gemeinsamen Punkt haben, der auf dem Wege $G_2 G'_2$ liegende Gabelungspunkt von W (Abzweigungspunkt eines rechten Nachbarn) also von dem erstgenannten verschieden ist, und so fort. q. e. d.

Wir können zusammenfassend sagen:

($b'd'$) Wird einer abgeschlossenen Menge $M = \{x\}$ reeller Zahlen $0 \leqq x \leqq 1$ gemäß (ZX) und (ZX') ein Teilfächer F von V_p zugeordnet, so werden dabei die isolierten Punkte von M umkehrbar eindeutig auf die A-Wege von F, die in Ruten einmünden, abgebildet. (Das gilt schon bei Anwendung von (ZX) allein und auch für nichtabgeschlossene Mengen.) Häufungspunkte von M können zwei Bilder in F haben, die dann benachbarte A-Wege, beide mit unendlich vielen Gabelungspunkten sind. Jedem A-Weg von F mit unendlich vielen Gabelungspunkten entspricht genau ein Häufungspunkt von M. Bildet man zu F gemäß (ZF) die Menge R, so ist $R = M$.

Läßt man in (ZX') und ($b'd'$) das Wort „abgeschlossen" fort, so bleibt ($b'd'$) bis auf den letzten Satz richtig. Die Häufungspunkte, von denen die Rede ist, sind dann nicht notwendig Elemente von M.

Aus ($b'd'$) und Definition 2 ist direkt abzulesen:

(h) Jeder perfekten Menge reeller Zahlen $0 \leqq x \leqq 1$ entspricht vermöge (ZX) und (ZX') eine Vollverzweigung, und jeder Vollverzweigung, die als A enthaltender Teil von V_p aufgefaßt werden kann, entspricht vermöge (ZF) eine perfekte Menge.

Nach diesen Vorbereitungen kann man verschiedene, in der Mehrzahl bekannte Sätze über lineare, hauptsächlich abgeschlossene Punktmengen aus den über Fächer angestellten Betrachtungen ablesen, ohne daß weitere wesentliche Beweisgedanken erforderlich wären. Wir denken uns dazu jeder Menge reeller Zahlen $0 \leqq x \leqq 1$ durch (ZX) und (ZX') einen Teilfächer F von V_p zugeordnet. Die Vorschrift (ZX') ist dabei nur für perfekte Mengen von Wert (vgl. (h)). Inwiefern die Einschränkung auf das Intervall $0 \dots 1$ keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt, bedarf bei den einzelnen Behauptungen wegen der bekannten ähnlichen Abbildbarkeit der Intervalle $\langle 0, 1 \rangle$, $\langle a, b \rangle$ und $\langle -\infty, +\infty \rangle$ aufeinander keiner Ausführung. Die Auflockerung des Kontinuums in einen Fächer aus „sichtbar" diskreten A-Wegen gestattet,

da die Ordnung erhalten bleibt, einige Tatsachen der Punktmengenlehre zu veranschaulichen und andere, die gewöhnlich überraschend wirken, in ihren Ursachen verständlich zu machen.

Als besonders einfache Beispiele nennen wir:

1. Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS (Häufungsstellensatz).

Beweis: Satz 1.

2. Jede abgeschlossene lineare Punktmenge ist entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Beweis: $(b'd')$ und Satz 10.

3. Jede abgeschlossene lineare Punktmenge ist höchstens abzählbar oder perfekt, oder als Summe einer perfekten und einer höchstens abzählbaren Menge darstellbar.

Beweis: $(b'd')$, (h), Satz 10 und die „Bemerkung“ hinter Satz 10.

4. Nirgends dichte perfekte Mengen:

Die Cantorsche „Wischmenge“ entsteht, wenn man in einer V_3 bei jedem Gabelungspunkt den mittleren Ast streicht, d. h. den, dessen Anfangskante die Ziffer 1 trägt. Der Rest ist wieder eine Vollverzweigung, die zugehörige Menge nach (h) also perfekt und wegen (a') nirgends dicht, da zwischen irgend zwei A-Wegen des Restes bereits da, wo der eine vom anderen abzweigt, ein Ast gestrichen wurde (der hier einem offenen Intervall entspricht, da die den gestrichenen Ast nach rechts und links begrenzenden A-Wege Nachbarn besitzen, die im ungestrichenen Rest verbleiben).

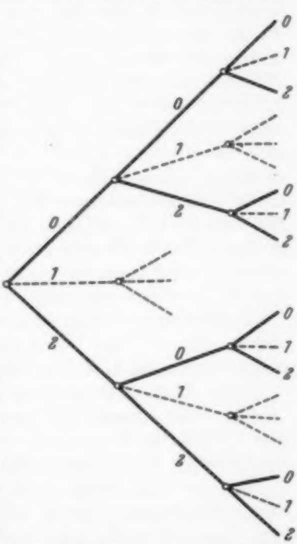

Fig. 2. Die Cantorsche Wischmenge.

Die bekannte, nirgends dichte perfekte Menge der Dezimalbrüche, die nur die Ziffern 0 und 1 enthalten, entsteht, wenn man in einer V_{10} alle Äste streicht, deren Anfangskanten eine der Ziffern 2, . . ., 9 tragen. Der Rest ist wie eben eine V_2, wenn man die Einbettung in die V_{10} nicht beachtet. Aus analogen Gründen wie eben entspricht dem Rest daher eine nirgends dichte perfekte Menge.

5. Eine perfekte lineare Punktmenge M kann (höchstens) abzählbar viele Punktepaare enthalten, bei denen jeder Punkt eines Paares in bezug auf den andern Punkt desselben Paares ein zu ihm in M nächstgelegener Punkt ist. Die perfekte Menge M läßt sich auf das abgeschlossene Intervall $\langle 0, 1\rangle$ ähnlich abbilden, wenn man in ihr jeweils die beiden Punkte eines solchen Paares miteinander identifiziert.

Beweis: Die V_2 entspricht dem ganzen abgeschlossenen Intervall $\langle 0, 1\rangle$. V sei die M gemäß (h) entsprechende Teilvollverzweigung von V_2. Wir nennen zwei A-Wege von V „Nachbarn in V“, wenn kein A-Weg von V zwischen ihnen verläuft. Nachbarn in V können verschiedene Punkte von M repräsentieren, von denen dann jeder ein zu dem anderen in M nächstgelegener Punkt ist. Umgekehrt müssen in M zueinander nächstgelegene Punkte durch

Nachbarn in V repräsentiert werden. Wie in V_2 gibt es aber auch in V nur abzählbar viele Nachbarpaare. Wir denken uns nun in V, falls A ein Endpunkt von V ist, den Weg von A bis zum ersten Gabelungspunkt hinter A (vgl. Beweis zu Satz 1) gestrichen. Ist P ein von diesem Gabelungspunkt verschiedener Knotenpunkt des Restes von V, der kein Gabelungspunkt dieses Restes ist, so mögen die beiden in P zusammenstoßenden Kanten zu einer Kante verschmolzen werden. Die so behandelte Vollverzweigung V hat dann wieder die Gestalt von V_2 angenommen, und die behauptete Möglichkeit der ähnlichen Abbildung ist damit evident.

6. Die Menge der Verdichtungspunkte einer nichtabzählbaren linearen Punktmenge ist perfekt; der Menge selbst gehören nichtabzählbar viele ihrer Verdichtungspunkte an.

Beweis: Genau wie bei der Konstruktion von V_u im Beweis zu Satz 10 schließt man: ist F der der gegebenen Menge M zugeordnete Teilfächer von V_p, so muß F eine umfassendste Vollverzweigung V_u enthalten, in deren jeden Ast Z nichtabzählbar viele A-Wege mit zugeordnetem x aus M einmünden. Die V_u durch (ZF) zugeordnete Menge R ist die Menge der Verdichtungspunkte von M, die also nach (h) perfekt ist. Ist nämlich W ein A-Weg von V_u, so gibt es zu jedem $n > 0$ einen Ast Z_n von V_u, der erst hinter der n-ten Kante von W abzweigt. Die nichtabzählbar vielen in Z_n einmündenden A-Wege mit zugeordnetem x aus M bedeuten die Existenz nichtabzählbar vieler x in M mit $|x - x_w| < p^{-n}$, wenn x_w das Bild von W ist. Ist umgekehrt x_0 ein Verdichtungspunkt von M, so bedeuten die nichtabzählbar vielen x in M mit $|x - x_0| < p^{-n}$, daß in F ein x_0 repräsentierender A-Weg W_0 existiert, von dem die den genannten x zugeordneten A-Wege erst hinter der n-ten Kante abzweigen können, so daß also die ersten n-Kanten von W_0 für jedes n zu V_u gehören, und daß somit W_0 selbst zu V_u gehört. Schließlich besitzt V_u nach Konstruktion nichtabzählbar viele A-Wege mit zugeordnetem x aus M, und nach dem oben Bewiesenen sind diese nichtabzählbar vielen x aus M Verdichtungspunkte von M.

Bezeichnung: Unter einer *verdichteten* Menge wollen wir eine Menge verstehen, die nur aus Verdichtungspunkten von sich selbst besteht (— aber nicht notwendig alle ihre Verdichtungspunkte enthält).

Dann kann man in Analogie zu 3. behaupten:

3a. Jede lineare Punktmenge M ist entweder höchstens abzählbar oder eine verdichtete Menge, oder als Summe einer höchstens abzählbaren und einer verdichteten Menge darstellbar.

Beweis: Vgl. Beweis zu 6.; wir setzen $M = M_a + M_V$, wobei M_V die Teilmenge derjenigen x aus M ist, für die ein zugeordneter A-Weg zu V_u gehört, und $M_a = M - M_V$ ist. Nach dem Beweis zu 6. ist dann M_V (entweder die Nullmenge oder) eine verdichtete Menge, und M_a ist abzählbar, da es ja nach der Bemerkung hinter Satz 10 nur abzählbar viele A-Wege in F geben kann, die nicht zu V_u gehören.

Es folgt also weiter:

6a. Eine nichtabzählbare lineare Punktmenge besitzt höchstens abzählbar viele Nicht-Verdichtungspunkte.

7. Jede perfekte lineare Punktmenge ist nichtabzählbar und gleich der Menge ihrer Verdichtungspunkte.

Beweis: Nach (h) und Satz 10 ist sie nichtabzählbar, nach (h) und 6. ist daher $F = V_u$ (vgl. Beweis zu 6.).

8. Satz von Cantor-Bendixson über die Ableitungen von Punktmengen mit dem Zusatz, daß bei abzählbarem M das kleinste α mit $M^{(\alpha)} = N$ (Nullmenge) keine Limeszahl ($\neq 0$) sein kann, und mit der Umkehrung, daß es — von der eben genannten Einschränkung abgesehen — zu jedem α der ersten und zweiten Zahlklasse auch abgeschlossene Mengen gibt, für die $M^{(\alpha)} = N$ bzw. perfekt ist, während $M^{(\beta)}$ für $\beta < \alpha$ noch nicht die Nullmenge bzw. nicht perfekt ist.

Beweis: (d), (h), Satz 11 und Satz 13.

Bemerkung: Nach (h) und Satz 13 kann man in 8. bei jedem α die perfekte Menge P mit $M^{(\alpha)} = P$ (M gesucht) sogar beliebig vorschreiben.

9. Die Bairesche Verallgemeinerung des Cantor-Bendixsonschen Satzes: Es sei jeder Ordinalzahl α der ersten und zweiten Zahlklasse eine abgeschlossene lineare Punktmenge M_α zugeordnet, aber so, daß für je zwei Ordinalzahlen $\beta > \alpha$ die Menge M_β eine Untermenge von M_α ist; dann gibt es eine Zahl μ der ersten oder zweiten Zahlklasse, so daß $M_\mu = M_{\mu+1} = \cdots$ ist. Kommt außerdem niemals ein isolierter Punkt einer Menge in der folgenden vor, so ist M_μ die Nullmenge oder perfekt.

Beweis: Es mögen sich M_α und F_α entsprechen. Wenn $M_{\alpha+1}$ ein echter Teil von M_α ist, muß wegen der Abgeschlossenheit der Mengen auch $F_{\alpha+1}$ ein echter Teil von F_α sein, d. h. es muß in F_α mindestens eine Kante und wegen des Zusammenhanges von $F_{\alpha+1}$ also ein ganzer Ast Z gestrichen werden. F_0 besitzt nur abzählbar viele Äste. Zu jedem, der davon gestrichen wird, gibt es ein wohlbestimmtes kleinstes α der ersten oder zweiten Zahlklasse so, daß der betreffende Ast in F_α nicht mehr vorkommt. Also gibt es ein μ in einer dieser Zahlklassen, das alle diese α majorisiert. In F_μ sind daher alle Äste von F_0 gestrichen, die überhaupt gestrichen werden, und es ist also $F_\mu = F_{\mu+1} = \cdots$. Kommt nie ein isolierter Punkt von M_α in $M_{\alpha+1}$ vor, so ist $M_\alpha \subseteq M_0^{(\alpha)}$, und die Behauptung folgt daher sofort aus (h) und Satz 11 bzw. aus 8.

Weiter ergibt sich ein diesem Baireschen Satz entsprechender Satz über den sukzessiven Aufbau von Mengen:

10. Es sei jeder Ordinalzahl α der ersten und zweiten Zahlklasse eine abgeschlossene lineare Punktmenge M_α zugeordnet, aber so, daß für $\alpha < \beta$ M_α ein Teil von M_β ist; dann gibt es eine Ordinalzahl μ der ersten oder zweiten Zahlklasse derart, daß $M_\mu = M_{\mu+1} = \cdots$ ist.

Beweis: Jedem M_α entspricht in V_p ein Fächer F_α. Für $\alpha < \beta$ ist $F_\alpha \subseteq F_\beta$. Zu jedem α gibt es entweder gar kein $F_\beta \supset F_\alpha$, oder ein erstes $F_\beta \supset F_\alpha$. Indem bei jedem α alle etwa vorhandenen gleichen Fächer mit größerem Index fortgelassen werden, entsteht eine in V_p geschachtelte Menge von Fächern, die also abzählbar ist. Es kann also nur abzählbar viele Mengen unter den gegebenen Mengen geben, deren jede eine echte Obermenge aller ihr in der Wohlordnung vorangehenden Mengen ist. Ist μ eine Ordinalzahl, die die Indizes dieser Mengen majorisiert, so ist also $M_\mu = M_{\mu+1} = \cdots$.

11. Eine nicht abzählbare lineare Punktmenge M, deren Elemente wie die zugeordneten Zahlen auf der Zahlengeraden geordnet sind, ist niemals wohlgeordnet.

Beweis: F enthält eine Vollverzweigung V (vgl. 6.). Wir wollen wieder zwei A-Wege von V „Nachbarn in V" nennen, wenn kein A-Weg, der in V_p zwischen ihnen liegt, zu V gehört. Es gibt in V aus dem gleichen Grunde

wie in V_p nur abzählbar unendlich viele Nachbarpaare. Unter den nichtabzählbar vielen A-Wegen von V mit zugehörigem x aus M gibt es also solche, zu denen kein Nachbar in V existiert. Ist W_0 ein solcher, und ist x_0 aus M W_0 zugeordnet, so gibt es zu x_0 in M kein nächstfolgendes Element. Denn da W_0 in V keinen Nachbar hat, liegt zwischen W_0 und jedem anderen A-Weg W_2 mit zugeordnetem x_2 aus M noch ein weiterer A-Weg W' in V, und wenn W' auch kein x' aus M zu entsprechen braucht, so gibt es doch nach Konstruktion von F A-Wege W_1 mit zugeordnetem x_1 aus M, die mit W' bis hinter die Abzweigungspunkte W_0, W' und W_2, W' übereinstimmen, so daß auch W_1 zwischen W_0 und W_2 und nach (a) also x_1 zwischen x_0 und x_2 liegt.

12. Ist M eine abzählbare abgeschlossene lineare Punktmenge, so liegen in jeder Umgebung jedes Häufungspunktes von M noch (unendlich viele) isolierte Punkte von M.

Beweis: Der M zugeordnete Fächer F enthält keine Vollverzweigung. x_0 sei ein Häufungspunkt von M und W_0 ein ihm zugeordneter A-Weg mit unendlich vielen Gabelungspunkten. Z_n sei irgendeiner der unendlich vielen von W_0 hinter der n-ten Kante von W_0 abzweigenden Äste (n beliebig fest). Jeder in Z_n einmündende A-Weg repräsentiert ein x aus M mit $|x - x_0| < p^{-n}$. Mindestens ein in Z_n einmündender A-Weg muß schließlich in eine Rute einmünden, — d. h. einen isolierten Punkt von M vertreten (vgl. (b′ d′)) —, da sonst jeder in Z_n einmündende A-Weg unendlich viele Gabelungspunkte hätte und F also in Gestalt von Z_n doch eine Vollverzweigung enthielte.

(Eingegangen am 29. Juni 1949.)

Math. Annalen, Bd. 122, S. 259—275 (1950).

Entscheidung des algebraischen Charakters von Potenzreihen mit algebraischen Koeffizienten auf Grund ihres Wertevorrates.

Von

Karl Dörge in Köln.

Ernst Fischer zum 75. Geburtstag gewidmet.

Der Weierstrass-Schüler E. Strauss hat 1886 versucht[1]), folgendes zu beweisen: Hat eine Potenzreihe rationale Koeffizienten und nimmt sie an jeder rationalen Stelle einen rationalen Wert an, so ist sie eine rationale Funktion.

Daraufhin ist durch von Weierstrass, Stäckel und Faber konstruierte Gegenbeispiele diese Vermutung widerlegt worden[2]). Weierstrass bewies: Es gibt Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten, die transzendente Funktionen sind und dennoch an jeder rationalen Stelle einen rationalen Wert annehmen. Faber bewies als weitgehendstes Gegenbeispiel dieser Art: Es gibt Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten, die transzendente Funktionen sind und trotzdem an jeder algebraischen Stelle einen rationalen Wert annehmen.

Es zeigt sich also folgendes: Hat man eine Potenzreihe, sogar mit rationalen Koeffizienten, so läßt sich ihr algebraischer oder transzendenter Charakter nicht entscheiden, wenn man die (algebraischen) Grade der Werte des Wertbereiches, der zur Menge selbst aller eingesetzten algebraischen Zahlen gehört, kennt.

Es soll nun gezeigt werden, daß die Frage sich einfach löst, wenn man eine analytische Verschärfung des Begriffs des Grades der algebraischen Zahl benützt. Dieser hier eingeführte Begriff wird als „Transzendenzgrad" der Zahl bezeichnet.

Naturgemäß werden im folgenden statt Potenzreihen Puiseux-Reihen untersucht. Es wird vorausgesetzt, daß deren Koeffizienten algebraische Zahlen sind und daß der von ihnen erzeugte Zahlkörper zwar nicht notwendig ein „endlicher" Zahlkörper ist, aber einer ähnlichen, etwas schwächeren Einschränkung unterliegt.

Es zeigt sich dann, daß es zur Entscheidung über den algebraischen Charakter der vorgelegten Reihe ausreicht, einen ziemlich kleinen Ausschnitt des Wertevorrates der Reihe zu kennen. Z. B. reicht es aus, den Wertevorrat der etwa nach fallenden Potenzen der Variablen fortschreitend geschriebenen Reihe für eine nicht beschränkte Menge ganz rationaler Zahlen zu kennen[3]).

Wie am Schluß angegeben wird, reicht der eingeführte Begriff hin, um auch etwas allgemeinere Fragen zu beantworten.

---

[1]) Vgl. Stäckel: Math. Ann. **46**, 513 (1895).

[2]) Stäckel: Math. Ann. **46**, 513 (1895) u. Acta math. **25**, 371 (1902). — Faber: Math. Ann. **58**, 545 (1904).

[3]) Die bewiesenen Sätze sind auf der Tagung der D. M.V. in Köln 1949 mitgeteilt.

§ 1. Einige Begriffe und Hilfssätze.

Unter Zahlen verstehen wir im folgenden komplexe Zahlen.

Definition 1. Man habe ein Polynom $P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \cdot x^\nu$, $n \geqq 1$, mit den Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Wir verstehen unter der *Höhe von* $P(x)$ das Maximum der $n+1$ Zahlen $|c_0|, |c_1|, \ldots, |c_n|$. Wir bezeichnen sie mit $\omega(P(x))$, auch mit $\omega(P)$.

Dann gilt:

Hilfssatz 1. Es sei der Betrag des höchsten Koeffizienten $|c_n| \geqq 1$. Dann erfüllt jede Wurzel ζ von $P(x)$ die Ungleichung:

$$|\zeta| \leqq n \cdot \omega(P).$$

Denn ist $|\zeta| > n \cdot \omega(P)$, so ergibt sich zunächst $|\zeta| > 1$. Daraus folgt weiter:

$$|c_n \cdot \zeta|^n \geqq |\zeta|^n = |\zeta| \cdot |\zeta|^{n-1} > n \cdot \omega(P) \cdot |\zeta|^{n-1} \geqq \Big| \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \cdot \zeta^\nu \Big| .$$

Also ist ζ nicht Wurzel von $P(x)$.

Definition 2. Es sei z eine algebraische Zahl. $P(x)$ sei das für z verschwindende, irreduzible Polynom mit teilerfremden, ganzrationalen Koeffizienten, dessen höchster Koeffizient positiv ist. Wir verstehen dann unter der *Höhe von* z die Höhe dieses Polynoms $P(x)$. Wir bezeichnen sie mit $\omega(z)$.

Ferner versteht man unter dem *Grad von* z den Grad von diesem $P(x)$. Wir bezeichnen ihn mit $\gamma(z)$[4]).

Dann folgt aus Hilfssatz 1 unmittelbar:

Hilfssatz 1.* Es sei z eine algebraische Zahl. Dann gilt:

$$|z| \leqq \gamma(z) \cdot \omega(z).$$

Definition 3. Es sei z eine algebraische Zahl. Dann gibt es (mindestens) eine ganze algebraische Zahl z^* und eine natürliche Zahl n, so daß ist: $z = \frac{z^*}{n}$. Die kleinste natürliche Zahl n, mit der es eine solche Darstellung von z gibt, nennen wir den *Nenner von* z. Wir bezeichnen ihn mit $\nu(z)$.

Bekanntlich ist dann $\nu(z) \leqq \omega(z)$.

Definition 4. Es sei z algebraisch, $z \neq 0$, $|z| \neq 1$. Die nicht negative reelle Zahl

$$\eta(z) = (\log \omega(z)) \cdot \big|\log|z|\big|^{-1}$$

nennen wir dann den *Exponenten von* z.

Offenbar ist $\eta(z)$ die Lösung der Gleichung

$$\omega(z) = (\max |z|, |z|^{-1})^\eta .$$

Da wir den algebraischen Zahlen auf dem Einheitskreise $|z| = 1$ und der Zahl 0 mittels der Gleichung in der vorigen Definition keinen Exponenten zuordnen können, so wollen wir diese Zahlen, um im folgenden eine kurze Bezeichnung zu haben, *singulär* nennen.

Wir führen nun den im folgenden entscheidenden Begriff „Transzendenzgrad" ein:

---

[4]) Offenbar ist $\omega(z) \geqq 1$ und $\gamma(z) \geqq 1$.

Definition 5. Es sei z eine nicht singuläre, algebraische Zahl. Dann nennen wir

$$\max(\gamma(z), \eta(z)) = \tau(z)$$

den *Transzendenzgrad von z.*

Es sei z eine transzendente Zahl. Dann sagen wir, z hat den Transzendenzgrad $\tau(z) = \infty$.

Schließlich sei noch (aus formalen Gründen) jeder singulären algebraischen Zahl nach Belieben eine reelle Zahl $\geqq 1$ zugeordnet; diese nennen wir den Transzendenzgrad der singulären algebraischen Zahl.

Damit ist also jeder (komplexen) Zahl z eindeutig je ein bestimmter Transzendenzgrad $\tau(z)$ zugeordnet. Dies ist eine reelle Zahl $\geqq 1$ oder das Symbol ∞.

Definition 6. Es sei t eine feste reelle Zahl. Wir bezeichnen dann mit $\mathfrak{M}_t$ die Menge aller Zahlen z, deren Transzendenzgrad $\tau(z) \leqq t$ ist.

Für reelles $t < 1$ ist also $\mathfrak{M}_t$ die leere Menge.

Es sei $\mathfrak{M}$ eine Zahlenmenge der komplexen Zahlenebene. Wir sagen dann, $\mathfrak{M}$ ist von *beschränktem Transzendenzgrad*, wenn $\mathfrak{M}$ wenigstens in einem $\mathfrak{M}_t$ als Teilmenge enthalten ist.

Offenbar ist die Menge der rationalen Zahlen $r_n = \frac{n+1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nicht von beschränktem Transzendenzgrad. Ferner ist für $z \neq 0$: $\tau(z) = \tau(z^{-1})$ und $\tau(z) = \tau(-z)$. Die Menge $\mathfrak{M}_1$ besteht offenbar dann, wenn man hierbei von den singulären Zahlen absieht, aus der Menge aller ganz rationalen Zahlen $-n$, 0, n und den reziproken $-n^{-1}$ und n^{-1}, $(n = 1, 2, \ldots)$. Ist allgemeiner z irgendeine algebraische Zahl, so ist, wie man leicht sieht, die Menge der natürlichen Vielfachen $n \cdot z$ und, falls $|z| \neq 1$, die Menge der Potenzen von z mit natürlichen Exponenten von beschränktem Transzendenzgrad.

Die Vereinigungsmenge aller $\mathfrak{M}_t$, worin t eine nach oben nicht beschränkte Folge reeller Zahlen durchläuft, ist dann offenbar die Menge aller algebraischen Zahlen.

Für die Einteilung der algebraischen Zahlen in die Mengen $\mathfrak{M}_t$ gilt dann:

Hilfssatz 2. Hat man ein festes $\mathfrak{M}_t$, so ist für jede nicht singuläre Zahl z aus $\mathfrak{M}_t$ und jede zu diesem z algebraisch konjugierte Zahl z':

$$\nu(z') \leqq \omega(z') \leqq (\max|z|, |z|^{-1})^t.$$

Denn es ist ja $\omega(z') = \omega(z) = (\max|z|, |z|^{-1})^{\eta(z)}$ und natürlich $\eta(z) \leqq t$.

Weiterhin folgt:

Hilfssatz 3. Hat man irgendein festes $\mathfrak{M}_t$, so gilt für jede nicht singuläre Zahl z aus $\mathfrak{M}_t$ und jede zu diesem z algebraisch konjugierte Zahl z':

$$|z'| \leqq t \cdot (\max|z|, |z|^{-1})^t.$$

Denn nach Hilfssatz 1* ist $|z'| \leqq \gamma(z') \cdot \omega(z')$. Nun ist selbstverständlich für jedes Paar z, z' konjugierter Zahlen $\gamma(z') = \gamma(z)$. Also folgt mit Hilfssatz 2:

$$|z'| \leqq \gamma(z) \cdot (\max|z|, |z|^{-1})^t \leqq t \cdot (\max|z|, |z|^{-1})^t.$$

Man habe eine (endliche oder unendliche) Folge algebraischer Zahlen $z_1, z_2, \ldots$. Wir setzen voraus, daß es einen endlichen Erweiterungskörper K des Körpers P der rationalen Zahlen gibt, so daß K jedes z_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ der Folge als Element enthält. K entstehe aus P durch Adjunktion von ϑ.

Dies sei vom Grade n. Dann ist jedes z_ν als Polynom von ϑ mit rationalen Koeffizienten eindeutig darstellbar. D. h. es gilt also $z_\nu = z_\nu(\vartheta)$ für $\nu = 1, 2, \ldots$. Ersetzt man in jedem dieser Polynome $z_\nu(\vartheta)$ das Element ϑ durch eine bestimmte (algebraisch) konjugierte ϑ' von ϑ, so nennen wir die Folge der resultierenden Zahlen $z_\nu(\vartheta')$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ein zur Folge z_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ konjugiertes System (bezüglich ϑ). Speziell ist auch die Folge z_ν ein konjugiertes System. Tatsächlich ist dann bekanntlich die Gesamtheit der zur Folge z_ν konjugierten Systeme (bezüglich ϑ) von der Wahl des die Elemente z_ν umfassenden Körpers K und von der Wahl des K erzeugenden Elementes ϑ unabhängig.

Definition 7. Man habe zwei Systeme $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ je beliebig (endlich oder unendlich) vieler algebraischer Gleichungen. Wir sagen, $\mathfrak{S}_1$ ist zu $\mathfrak{S}_2$ äquivalent, wenn jede Lösung von $\mathfrak{S}_1$ auch Lösung von $\mathfrak{S}_2$ ist und umgekehrt jede Lösung von $\mathfrak{S}_2$ Lösung von $\mathfrak{S}_1$ ist.

Dann gilt:

Hilfssatz 4. Man habe ein System $\mathfrak{S}$ algebraischer Gleichungen von je endlich vielen Unbestimmten aus dem System $z_1, z_2, \ldots$, etwa $g(z_1, z_2, \ldots, z_n) \doteq 0$. Sind dann sämtliche Koeffizienten jeder Gleichung $g \doteq 0$ von $\mathfrak{S}$ algebraisch und gehören außerdem mit jeder Gleichung $g \doteq 0$ von $\mathfrak{S}$ je auch noch sämtliche Gleichungen mit den zu dem Koeffizientensystem von g konjugierten Koeffizientensystemen zu $\mathfrak{S}$, so gibt es ein mit $\mathfrak{S}$ äquivalentes Gleichungssystem $\mathfrak{S}^*$ mit lauter rationalen, (also gibt es auch eins mit ganz rationalen) Koeffizienten. Schärfer gilt: Ist $\mathfrak{S}$ homogen vom Grade l, so läßt sich dieses $\mathfrak{S}^*$ als System von homogenen Gleichungen von gleichem Grade l bestimmen.

Denn man greife eine Gleichung $g \doteq 0$ aus $\mathfrak{S}$ heraus. Ausführlich geschrieben sei:

$$g = \sum_{e_1, \ldots, e_n} a_{e_1 \ldots e_n} \cdot z_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot z_n^{e_n}.$$

Es sei K der von diesen a erzeugte Oberkörper über dem Körper P der rationalen Zahlen. K ist also ein endlicher Erweiterungskörper von P; er entstehe aus P durch Adjunktion von ϑ. Dann folgt also:

$$g = \sum_{e_1, \ldots, e_n} \left(\sum_{\sigma=0}^{s-1} a^{(\sigma)}_{e_1 \ldots e_n} \cdot \vartheta^\sigma\right) \cdot z_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot z_n^{e_n}$$

mit rationalen $a^{(\sigma)}$.

Es seien $\vartheta_1 = \vartheta, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_s$ die konjugierten zu ϑ. Bildet man zu der ν-ten Spalte der Matrix (ϑ_σ^ν), $\sigma = 1, 2, \ldots, s$, $\nu = 0, 1, \ldots, s-1$, die mit dem reziproken Wert der Determinante multiplizierten Adjunkten $C_{1\nu}, C_{2\nu}, \ldots, C_{s\nu}$, so ist $\sum_{\sigma=1}^{s} \vartheta_\sigma^\mu \cdot C_{\sigma\nu} = 1$ oder 0, je nachdem, ob $\nu = \mu$ oder $\nu \neq \mu$ ist. Hieraus ergibt sich, wenn man $\sum_{e_1 \ldots, e_n} \left(\sum_{\mu=0}^{s-1} a^{(\mu)}_{e_1 \ldots e_n} \cdot \vartheta_\sigma^\mu\right) \cdot z_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot z_n^{e_n}$ für jedes $\sigma = 1, 2, \ldots, s$ je mit $C_{\sigma\nu}$ multipliziert und diese s Produkte addiert, $\sum_{e_1 \ldots e_n} a^{(\nu)}_{e_1 \ldots e_n} \cdot z_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot z_n^{e_n}$. Da man dies für jede Spalte $\nu = 0, 1, \ldots, s-1$ durchführen kann und da man umgekehrt durch Multiplikation von

$\sum\limits_{\varrho_1 \ldots \varrho_n} a^{(\nu)}_{\varrho_1 \ldots \varrho_n} \cdot z_1^{\varrho_1} \cdot \cdots \cdot z_n^{\varrho_n}$ mit ϑ^ν ($\nu = 0, 1, \ldots, s-1$) und Addition dieser s Produkte offenbar das g zurückgewinnt und natürlich entsprechend durch Multiplikation mit ϑ^ν_σ ($\sigma = 1, 2, \ldots, s$ jeweils fest) das zu g konjugierte System erhält, so folgt also zunächst, daß jedes einzelne System der zu einer Gleichung aus $\mathfrak{S}$ konjugierten Gleichungen mit einem System ebensovieler Gleichungen mit rationalen Koeffizienten $a^{(\nu)}_{\varrho_1 \ldots \varrho_n}$ äquivalent ist. Verfährt man so mit jedem der genannten Teilsysteme von $\mathfrak{S}$, so erhält man offenbar ein mit dem ganzen $\mathfrak{S}$ äquivalentes System $\mathfrak{S}^*$, wie gefordert.

Es folgt:

Hilfssatz 5. Man habe ein System $\mathfrak{S}$ von k homogenen linearen Gleichungen in n Unbekannten mit algebraischen Koeffizienten. Diese seien aus einem algebraischen Zahlkörper vom Grade l über P. Ist dann $n > k \cdot l$, so hat das Gleichungssystem $\mathfrak{S}$ eine nicht triviale Lösung in rationalen Zahlen.

Denn man erweitere das System $\mathfrak{S}$ durch Hinzunahme sämtlicher konjugierter Gleichungen. Dann hat man insgesamt höchstens $k \cdot l$ Gleichungen mit n Unbekannten. Dieses erweiterte System $\mathfrak{S}_1$ ist nunmehr nach Hilfssatz 4 und seinem Beweise äquivalent mit einem System $\mathfrak{S}^*$ ebensovieler homogener linearer Gleichungen mit rationalen Koeffizienten. Wegen $n > k \cdot l$ existiert für $\mathfrak{S}^*$ eine nicht triviale Lösung in rationalen Zahlen. Also ist diese wegen der Äquivalenz auch Lösung von $\mathfrak{S}_1$, also erst recht auch Lösung des Teilsystems $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{S}_1$.

Es sei q eine natürliche Zahl, (also ganz rational und positiv). Unter $z^{\frac{1}{q}}$ verstehen wir die q-te Wurzel aus z mit absolut kleinster Amplitude. Dann ist also $(z^{\frac{1}{q}})^k = z^{\frac{k}{q}}$ für jede ganze rationale Zahl k eine eindeutige Funktion über der ganzen komplexen z-Ebene. Man betrachte dann eine Puiseux-Reihe:

$$\varphi(z) = a_k \cdot z^{\frac{k}{q}} + a_{k-1} \cdot z^{\frac{k-1}{q}} + \cdots + a_0 + a_{-1} \cdot z^{-\frac{1}{q}} + \cdots.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit vereinbaren wir hier aus formalen Gründen, daß der Anfangsindex $k \geqq 1$ sein soll, wobei dann aber natürlich a_k verschwinden kann.

Konvergiert die Reihe für wenigstens ein z_0, so ist sie außerhalb des Kreises durch z_0 um den Nullpunkt der komplexen Zahlenebene für jedes z konvergent. Die Menge der Punkte, wo sie konvergiert, heiße der *Konvergenzbereich* $\mathfrak{B}$ der Puiseux-Reihe

Definition 8. Man habe eine Puiseux-Reihe $\varphi(z)$. Ihr Konvergenzbereich $\mathfrak{B}$ sei nicht leer. Wenn es dann $n+1$ Polynome $Q^{(l)}_\nu(z)$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) gibt, (wobei l den Maximalgrad dieser Polynome bezeichnet), so daß $\sum\limits_{\nu=0}^{n} Q^{(l)}_\nu(z) \cdot (\varphi(z))^\nu = 0$ für alle z aus $\mathfrak{B}$ gilt und nicht sämtliche $Q^{(l)}_\nu(z)$ identisch in z verschwinden, dann sagen wir, $\varphi(z)$ ist eine algebraische Funktion vom Grade n (und vom Argumentgrad l) im funktionentheoretischen Sinne. Dasselbe sagen wir im „arithmetischen Sinne“, wenn es solche Polynome $Q^{(l)}_\nu(z)$ mit rationalen Koeffizienten gibt.

Dann gilt:

Hilfssatz 6. Man habe eine Puiseux-Reihe $\varphi(z)$. Ihre Koeffizienten seien algebraisch. n, l seien ganz rational und positiv gegeben. Hat dann $\sum\limits_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(z)\cdot(\varphi(z))^\nu$ in den $Q_\nu^{(l)}$ eine nicht triviale Nullstelle, d. h. $n+1$ Polynome $Q_\nu^{(l)}$, die nicht sämtlich verschwinden, so gibt es auch eine nicht triviale Lösung in den $Q_\nu^{(l)}$ mit rationalen Koeffizienten. D. h. mit anderen Worten: Algebraische Funktionen im funktionentheoretischen Sinne und im arithmetischen Sinne sind, falls ihre Koeffizienten algebraisch sind, äquivalente Begriffe.

Denn die Forderungsgleichung $\sum\limits_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(z)\cdot(\varphi(z))^\nu \doteq 0$ ist, wenn wir hieraus die Koeffizientenrelationen für jede feste Potenz von $z^{\frac{1}{q}}$ einzeln ableiten, äquivalent mit einem bestimmten System (unendlich vieler) homogener Gleichungen mit algebraischen Koeffizienten für die Koeffizienten der $Q_\nu^{(l)}$ als Unbekannte. Da dieses homogene Gleichungssystem nach Voraussetzung eine nicht triviale Lösung in den Koeffizienten der $Q_\nu^{(l)}$ hat, so hat es auch eine nicht triviale algebraische Lösung. Wir sehen also zunächst, daß es für unsere Forderungsgleichung $\sum\limits_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(z)\cdot(\varphi(z))^\nu \doteq 0$ eine nicht triviale Lösung in den $Q_\nu^{(l)}$ mit algebraischen Koeffizienten gibt. Nun ersetze man die Koeffizienten dieser $n+1$ Polynome $Q_\nu^{(l)}$ durch die algebraisch konjugierten Systeme. Man erhält so endlich viele Summen anstelle der ersten $\sum\limits_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(z)\cdot(\varphi(z))^\nu$. Man multipliziere diese Summen aus. Dann erhält man ein Polynom von $\varphi(z)$, natürlich im allgemeinen von höherem als n-tem Grade, dessen Koeffizienten Polynome von z, nunmehr mit rationalen Koeffizienten sind, die nicht sämtlich verschwinden.

§ 2. Transzendente Funktionen.

Man habe eine Puiseux-Reihe $\varphi(z)$ mit Koeffizienten aus einem Erweiterungskörper K von P vom Grade r. Wir setzen an: $\sum\limits_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(z)\cdot(\varphi(z))^\nu$ und wollen die $Q_\nu^{(l)}(z)$ vom Grade l mit rationalen Koeffizienten so zu bestimmen suchen, daß bei der sich ergebenden Puiseux-Reihe von $z^{\frac{1}{q}}$ der erste nicht verschwindende Koeffizient einen möglichst niedrigen Index hat.

Da uns $(n+1)\cdot(l+1)$ Unbestimmte in den Koeffizienten der $Q_\nu^{(l)}$ zur Verfügung stehen, gibt es nach Hilfssatz 5 eine nicht triviale Lösung in rationalen Zahlen für mindestens $\left[\frac{(n+1)\cdot(l+1)-1}{r}\right]$ Gleichungen. Da der formal höchste Exponent von $z^{\frac{1}{q}}$ der Puiseux-Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(z)\cdot(\varphi(z))^\nu$ gleich $n\cdot k + l\cdot q$ ist, so folgt:

Hilfssatz 7. Man habe eine Puiseux-Reihe $\varphi(z) = a_k\cdot z^{\frac{k}{q}} + a_{k-1}\cdot z^{\frac{k-1}{q}} + \cdots$ mit algebraischen Koeffizienten aus einem Erweiterungskörper vom Grade r über P.

Dann kann man zu je zwei natürlichen Zahlen n, l immer $n+1$ Polynome $Q_\nu^{(l)}(z)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ vom Grade l mit rationalen Koeffizienten, die nicht sämtlich verschwinden, so bestimmen, daß der erste nicht verschwindende Koeffizient der nach Potenzen von $z^{\frac{1}{q}}$ geordneten Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(z)\cdot(\varphi(z))^\nu$ den Index $n\cdot k + l\cdot q - \left[\frac{(n+1)\cdot(l+1)-1}{r}\right]$ oder einen späteren hat.

Man habe eine Puiseux-Reihe $\varphi(z) = a_k\cdot z^{\frac{k}{q}} + a_{k-1}\cdot z^{\frac{k-1}{q}} + \cdots$. Dann verstehe man für jede natürliche Zahl s unter φ_s die Summe der (formal) s ersten Glieder von $\varphi(z)$. Deutlicher schreiben wir statt φ_s auch $\varphi_{s\,\mathrm{ab}\,k}$; d. h. also von dem mit der k-ten Potenz in $z^{\frac{1}{q}}$ in jedem Falle, auch wenn $a_k = 0$ ist, als beginnend angesehenen $\varphi(z)$ nehme man die Summe der s ersten Glieder. Es ist also $\varphi_s = \sum\limits_{\varkappa=k}^{k-s+1}{}' a_\varkappa\cdot z^{\frac{\varkappa}{q}}$.

Offenbar gilt dann:

Hilfssatz 8. $(\varphi^\nu)_{s\,\mathrm{ab}\,k\cdot\nu} = ((\varphi_s)^\nu)_{s\,\mathrm{ab}\,k\cdot\nu}$ für jeden Exponenten $\nu = 1, 2, \ldots$

Allgemeiner gilt für jedes System von Polynomen $Q_\nu^{(l)}$:

$$\left(\sum_{\nu=0}^{n}{}' Q_\nu^{(l)}(z)\cdot(\varphi(z))^\nu\right)_{s\,\mathrm{ab}\,k\cdot n+l\cdot q} = \left(\sum_{\nu=0}^{n}{}' Q_\nu^{(l)}(z)\cdot(\varphi_s(z))^\nu\right)_{s\,\mathrm{ab}\,k\cdot n+l\cdot q}.$$

Denn die linke Seite dieser Gleichung ist offenbar von den (späteren) Gliedern von $\varphi(z)$, die nicht seinem s-ten Abschnitt φ_s angehören, unabhängig.

Weiter folgt:

Hilfssatz 9. Man habe eine Puiseux-Reihe $\varphi(z) = a_k\cdot z^{\frac{k}{q}} + a_{k-1}\cdot z^{\frac{k-1}{q}} + \cdots$ mit algebraischen Koeffizienten. Es sei s eine natürliche Zahl. Es sei r_s der Grad des von den Koeffizienten von $\varphi_s(z)$ erzeugten Körpers über P, also

$$1 \leqq r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_s \leqq \ldots$$

Dann gilt für jedes Tripel natürlicher Zahlen n, l, s: Es gibt $n+1$ Polynome $Q_\nu^{(l)}(z)$ des Grades l mit rationalen Koeffizienten, die nicht sämtlich verschwinden, so daß die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{n}{}' Q_\nu^{(l)}(z)\cdot(\varphi(z))^\nu$ frühestens anfängt mit dem folgenden Exponenten von $z^{\frac{1}{q}}$:

$$n\cdot k + l\cdot q - \min\left(\left[\frac{(n+1)\cdot(l+1)-1}{r_s}\right], s\right).$$

Denn man betrachte $\varphi_s(z)$. Dann lassen sich hierfür nach Hilfssatz 7 die $Q_\nu^{(l)}$ so bestimmen, daß $\sum\limits_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(z)\cdot(\varphi_s(z))^\nu$ in $z^{\frac{1}{q}}$ frühestens mit dem Exponenten $n\cdot k + l\cdot q - \left[\frac{(n+1)\cdot(l+1)-1}{r_s}\right]$ anfängt, d. h. die $\left[\frac{(n+1)\cdot(l+1)-1}{r_s}\right]$ ersten Glieder von $\sum\limits_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(z)\cdot(\varphi_s(z))^\nu$, wobei dasjenige mit dem Exponenten $n\cdot k + l\cdot q$ von $z^{\frac{1}{q}}$ als erstes gilt, verschwinden. Es sei zunächst $s \leqq \left[\frac{(n+1)\cdot(l+1)-1}{r_s}\right]$. Dann verschwinden nach Hilfssatz 8 die s ersten

Glieder von $\sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(z)\cdot(\varphi(z))^\nu$, wie behauptet. Es sei andererseits $\left[\frac{(n+1)\cdot(l+1)-1}{r_s}\right] < s$. Dann verschwinden nach Hilfssatz 8 die $\left[\frac{(n+1)\cdot(l+1)-1}{r_s}\right]$ ersten Glieder von $\sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(z)\cdot(\varphi(z))^\nu$. Also gilt die Behauptung von Hilfssatz 9 in jedem Falle.

Definition 9. Man habe eine Puiseux-Reihe $\varphi(z)$. Es sei $\bar{z}$ eine feste Zahl vom Betrage $|\bar{z}| \neq 1$ aus dem Konvergenzbereich $\mathfrak{B}$ von $\varphi(z)$. Es sei $\varphi(\bar{z}) = \xi$ eine algebraische Zahl. Dann existiert also $\omega(\xi)$. Dann bezeichnen wir die reelle Zahl μ, für die $|\bar{z}|^\mu = \omega(\xi)$ ist, mit $\mu(\xi, \bar{z})$.

Ist $|\bar{z}| = 1$, $\bar{z}$ aus $\mathfrak{B}$ und $\varphi(\bar{z}) = \xi$ algebraisch, so setze man $\mu(\xi, \bar{z})$ nach Belieben als reelle Zahl fest.

Wir werden nun die folgende Tatsache beweisen:

Hilfssatz 10. Die Puiseux-Reihe $\varphi(z) = a_k \cdot z^{\frac{k}{q}} + a_{k-1}\cdot z^{\frac{k-1}{q}} + \cdots$ sei transzendent. Mit der Bedeutung der r_s aus Hilfssatz 9 gelte $\underline{\lim}\, \frac{r_s}{s} = 0$. Dann gebe man die drei reellen Zahlen t, g, m vor und betrachte die Menge der Zahlen $\bar{z}$ aus dem Konvergenzbereich $\mathfrak{B}$ von $\varphi(z)$, für die folgendes gilt:

1. $\bar{z}$ gehört zu $\mathfrak{M}_t$,
2. $\varphi(\bar{z}) = \xi$ ist algebraisch,
3. $\gamma(\xi) \leqq g$ und
4. $\mu(\xi, \bar{z}) \leqq m$.

Dann gilt: Die Menge dieser $\bar{z}$ ist beschränkt.

Beweis: Wir dürfen offenbar annehmen: $t \geqq 1, g \geqq 1, m > 0$. Wir tun dies. Ferner dürfen wir uns selbstverständlich darauf beschränken, solche $\bar{z}$ zu betrachten, die außerhalb des Einheitskreises und auch außerhalb irgendeines festen Kreises um den komplexen Nullpunkt liegen. Wir wählen also $S_1(a)$, so daß die Punkte der komplexen Ebene außerhalb des Kreises mit dem Radius $S_1(a)$ ganz in $\mathfrak{B}$ fallen. Dann setzen wir max $(S_1(a), 1) = S_2(a)$. Dann beschränken wir unsere Betrachtung auf solche $\bar{z}$, für welche gilt

$$|\bar{z}| > S_2(a).$$

Wir wählen dann zwei natürliche Zahlen l, n. Es seien $Q_\nu^{(l)}(z)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ $n+1$ Polynome vom Grade l mit rationalen Koeffizienten, die nicht sämtlich verschwinden.

Dann ist die Zahl $\sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(\bar{z})\cdot(\varphi(\bar{z}))^\nu$ nach Voraussetzung (2) für jedes unserer $\bar{z}$ eine algebraische Zahl α. Man ersetze in der Darstellung $\sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(\bar{z})\cdot\xi^\nu$ von α das $\bar{z}$ durch jede Konjugierte $\bar{z}'$ von $\bar{z}$, desgleichen unabhängig davon $\varphi(\bar{z}) = \xi$ durch jede Konjugierte ξ' von ξ. Dann kommen unter diesen Zahlen $\sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(\bar{z}')\cdot\xi'^\nu$ mindestens alle konjugierten Zahlen von α vor, weil die Koeffizienten der $Q_\nu^{(l)}$ rational sind. Diese Zahlen wollen wir nun abschätzen. Zunächst folgt wegen $|\bar{z}| > S_2 \geqq 1$ nach Hilfssatz 3: $|\bar{z}'| \leqq t\cdot|\bar{z}|^t$

Weiter folgt mittels Definition 9 wegen $|z| > 1$ und Voraussetzung (4): $\omega(\xi) \leqq |\bar{z}|^m$. Daraus folgt mittels Hilfssatz 1 und Voraussetzung (3):

$$|\xi'| \leqq \gamma(\xi') \cdot \omega(\xi') \leqq g \cdot |\bar{z}|^m.$$

Also ergibt sich aus diesen beiden Abschätzungen von $|\bar{z}'|$ und $|\xi'|$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(z') \cdot \xi'^\nu\right| \leqq |\text{max der Beträge der Koeffizienten der } Q_\nu^{(l)}| \times$$
$$\times (l+1) \cdot (n+1) \cdot t^l \cdot |\bar{z}|^{l \cdot t} \cdot g^n \cdot |\bar{z}|^{m \cdot n} = C_1(Q_\nu^{(l)}, l, n, t, g) \cdot |\bar{z}|^{l \cdot t + m \cdot n}.$$ [5])

Wir wollen nun das Produkt Π genau aller von $\alpha = \sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(\bar{z}) \cdot \xi^\nu$ verschiedenen konjugierten Zahlen von α nach oben abschätzen. Aus der letzten Abschätzung folgt, da auf der linken Seite mindestens jede dieser Konjugierten von α einmal auftritt und ihre Anzahl wegen Voraussetzung (1) und (3) höchstens $t \cdot g - 1$ ist:

$$|\Pi| \leqq (C_1 \cdot |\bar{z}|^{l \cdot t + m \cdot n})^{t \cdot g - 1} = C_2(Q_\nu^{(l)}, l, n, t, g) \cdot |\bar{z}|^{l \cdot t\,(t \cdot g - 1) + m \cdot n \cdot (t \cdot g - 1)}.$$

Also folgt:

$$|\Pi| \leqq C_2(Q_\nu^{(l)}, l, n, t, g) \cdot |z|^{l \cdot C_3(t,g) + n \cdot C_4(m,t,g)}.$$

Nun benutzen wir, daß alle Koeffizienten der Puiseux-Reihe $\varphi(z)$ algebraisch sind. Dann können nach Hilfssatz 9 zu den vorgegebenen Zahlen l, n, s die Polynome $Q_\nu^{(l)}(z)$ mit rationalen und daher natürlich auch mit ganz rationalen Koeffizienten, die nicht sämtlich verschwinden, so bestimmt werden, daß gilt:

$$\sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(\bar{z}) \cdot (\varphi(\bar{z}))^\nu = \left(\bar{z}^{\frac{1}{\nu}}\right)^{k \cdot n + l \cdot q - \min\left(\left[\frac{(n+1)\cdot(l+1)-1}{r_s}\right], s\right)} \times$$
$$\times \left(c_0 + c_{-1} \cdot \bar{z}^{-\frac{1}{q}} + \cdots\right).$$

Wählt man noch eine reelle Zahl $S_3(a) > S_2(a)$, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} \cdot \left(z^{\frac{1}{q}}\right)^{-k}$ außerhalb des mit dem Radius $S_3(a)$ um den Nullpunkt der z-Ebene geschlagenen Kreises eine beschränkte Funktion. Es gibt daher eine reelle Konstante C_5, so daß für $|\bar{z}| > S_3(a)$ gilt:

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(\bar{z}) \cdot (\varphi(\bar{z}))^\nu\right| \leqq \left|\bar{z}^{\frac{1}{q}}\right|^{n \cdot k + l \cdot q - \min\left(\left[\frac{(n+1)\cdot(l+1)-1}{r_s}\right], s\right)} \times$$
$$\times C_5(n, l, s, Q_\nu^{(l)}, a, S_3(a)).$$

Also folgt zusammengefaßt, wenn wir wieder kurz $\sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(\bar{z}) \cdot (\varphi(\bar{z}))^\nu$ mit α bezeichnen:

---

[5]) Die Bezeichnung $C_1(Q_\nu^{(l)}, l, n, t, g)$ soll angeben, daß die Konstante C_1 bestimmt werden kann, nachdem die $Q_\nu^{(l)}$, d. h. also deren Koeffizienten, l, n, t, g festgelegt sind. Entsprechend ist die Bezeichnung im folgenden. Die Zahlen, durch die die Konstanten bestimmt sind, sind vorsichtig, d. h. vielleicht manchmal in unnötig reichlichem Maße angegeben.

$$(*)\qquad |\alpha \cdot \Pi| \leqq C_6 (n, l, s, Q_\nu^{(l)}, a, S_3 (a), t, g) \times$$
$$\times |\bar{z}|^{\frac{-1}{q} \cdot \min \left(\left[\frac{(n+1) \cdot (l+1) - 1}{r_s} \right], s \right)} + l \cdot C_7 (t, g) + n \cdot C_8 (m, t, g, k, q).$$

Nun benutzen wir die Voraussetzung, daß $\varphi (z)$ eine transzendente Funktion ist. Daher gibt es eine reelle Zahl $S_4 = S_4 (n, l, s, Q_\nu^{(l)}, a)$, so daß der Wert $\sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)} (\bar{z}) \cdot (\varphi (\bar{z}))^\nu \neq 0$ für jedes $\bar{z}$ vom Betrage $|\bar{z}| > S_4$ ist. Es sei dieses S_4 noch so gewählt, daß zugleich $S_4 \geqq S_3 (a)$ ist.

Dann ist also unser α und daher auch jede zu α konjugierte Zahl $\neq 0$. Folglich ist unser $\alpha \cdot \Pi$ eine rationale Zahl $\varrho \neq 0$. Es sei $\varrho = \frac{Z}{N}$ die reduzierte Darstellung von ϱ mit positivem Nenner N. Dieses N wollen wir nun abschätzen. Es ist ϱ gleich dem Produkt aus $\alpha = \sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)} (\bar{z}) \cdot \xi^\nu$ und gewissen $\Sigma' = \sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)} (\bar{z}') \cdot \xi'^\nu$, wobei $\bar{z}'$ jeweils eine Konjugierte zu $\bar{z}$, unabhängig davon ξ' eine Konjugierte zu $\xi = \varphi (\bar{z})$ war. Zunächst wollen wir den Nenner $\nu (\alpha)$ von α abschätzen. $\bar{z}$ habe den Nenner $\nu (\bar{z})$, ξ habe den Nenner $\nu (\xi)$. Weil die Koeffizienten der $Q_\nu^{(l)} (z)$ ganz rational sind, läßt sich α sicher auf den Nenner $(\nu (\bar{z}))^l \cdot (\nu (\xi))^n$ bringen.

$$\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \text{Nach Definition 4 und 5 ist:} & \nu (\bar{z}) \leqq \omega (\bar{z}) \leqq |z|^t, \\ \text{nach Definition 9:} & \nu (\xi) \leqq \omega (\xi) \leqq |\bar{z}|^{\mu(\xi, \bar{z})} \leqq |\bar{z}|^m. \end{array}$$

Entsprechendes folgt für jede Konjugierte $\bar{z}'$ von $\bar{z}$ wegen $\omega (\bar{z}') = \omega (\bar{z})$ und ähnlich für jede Konjugierte ξ' von ξ. Also folgt, zusammengefaßt, da es insgesamt höchstens $t \cdot g$ Konjugierte Σ' zu α gibt:

$$(**)\quad N \leqq \left((\nu (\bar{z}))^l \cdot (\nu (\xi))^n \right)^{t \cdot g} \leqq (\nu (\bar{z}))^{l \cdot t \cdot g} \cdot |\bar{z}|^{n \cdot m \cdot t \cdot g}.$$

Selbstverständlich ist $\frac{1}{N} \leqq |\varrho|$, also $N \geqq \frac{1}{|\varrho|} = \frac{1}{|\alpha \cdot \Pi|}$.

Also folgt mittels $(*)$:

$$N \geqq C_9 (n, l, s, Q_\nu^{(l)}, a, S_3 (a), t, g) \times$$
$$\times |\bar{z}|^{\frac{1}{q} \cdot \min \left(\left[\frac{(n+1) \cdot (l+1) - 1}{r_s} \right], s \right)} + l \cdot C_{10} (t, g) + n \cdot C_{11} (m, t, g, k, q)$$

mit $C_9 > 0$.

Dies ergibt mit $(**)$ weiter:

$$(\nu (\bar{z}))^{l \cdot t \cdot g} \geqq C_9 (n, l, s, Q_\nu^{(l)}, a, S_3 (a), t, g) \times$$
$$\times |\bar{z}|^{\frac{1}{q} \cdot \min \left(\left[\frac{(n+1) \cdot (l+1) - 1}{r_s} \right], s \right)} + l \cdot C_{10} (t, g) + n \cdot C_{12} (m, t. g, k, q).$$

Hieraus folgt:

$$\nu (\bar{z}) \geqq C_{13} (n, l, s, Q_\nu^{(l)}, a, S_3 (a), t. g) \times$$
$$\times |\bar{z}|^{C_{14} (t, g, q) \cdot \frac{1}{l} \cdot \min \left(\left[\frac{(n+1) \cdot (l+1) - 1}{r_s} \right], s \right) + C_{15} (t, g) + \frac{n}{l} \cdot C_{16} (m, t, g, k, q)}$$

für $|\bar{z}| > S_4$ mit $C_{13} > 0$ und $C_{14} = \frac{1}{t \cdot g \cdot q} > 0$.

Nun ziehen wir die Voraussetzung $\underline{\lim}\, \frac{r_s}{s} = 0$ hinzu. Wir wollen damit zeigen, daß wir den soeben erhaltenen Exponenten von $|\bar{z}|$ durch geeignete Wahl von n, l und s beliebig groß machen können. Denn zunächst wähle man eine Teilfolge der Folge $\frac{r_s}{s}$ so, daß $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{r_{s_\nu}}{s_\nu} = 0$ ist. Hieraus folgt mit dem Ansatz $r_{s_\nu} = \varrho_\nu \cdot s_\nu$: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varrho_\nu = 0$. Nun setzen wir: $\varrho'_\nu = \sqrt{\varrho_\nu}$. Dann folgt offenbar: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varrho'_\nu = 0$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{\varrho_\nu}{\varrho'_\nu} = 0$.

Nun wähle man einen festen Index ν und betrachte das durch die folgende Festsetzung eindeutig bestimmte Tripel ganz rationaler positiver Zahlen s, l, n:

$$s = s_\nu,\quad l = n = \varrho'_\nu \cdot s_\nu + \delta_\nu \text{ mit } 0 \leqq \delta_\nu < 1.$$

Offenbar genügt es, wenn wir zeigen, daß dann in dem Exponenten von $|\bar{z}|$ der erste Summand:

$$C_{14}(t, g, q) \cdot \frac{1}{l} \cdot \min\left(\left[\frac{(n+1)\cdot(l+1)-1}{r_s}\right], s\right)$$

mit wachsendem ν über alle Grenzen wächst.

Nun folgt in der Tat zunächst:

$$\frac{s}{l} = \frac{s_\nu}{\varrho'_\nu \cdot s_\nu + \delta_\nu} = \frac{1}{\varrho'_\nu + \frac{\delta_\nu}{s_\nu}} \text{ konvergiert gegen } \infty \text{ wegen } \lim_{\nu\to\infty} \varrho'_\nu = 0.$$

Andererseits folgt:

$$\frac{1}{l}\cdot\left[\frac{(n+1)\cdot(l+1)-1}{r_s}\right] \geqq \frac{1}{l}\cdot\frac{n\cdot l + n + l - r_s}{r_s} \geqq \frac{1}{l}\cdot\frac{n\cdot l + n}{r_s},$$

weil $l - r_s = \varrho'_\nu \cdot s_\nu + \delta_\nu - \varrho_\nu \cdot s_\nu > 0$ für $\varrho'_\nu > \varrho_\nu$, dies aber wegen $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{\varrho_\nu}{\varrho'_\nu} = 0$ für alle hinreichend großen ν zutrifft.

Also folgt auch:

$$\frac{1}{l}\cdot\left[\frac{(n+1)\cdot(l+1)-1}{r_s}\right] \geqq \frac{n}{r_s} = \frac{\varrho'_\nu \cdot s_\nu + \delta_\nu}{\varrho_\nu \cdot s_\nu} \geqq \frac{\varrho'_\nu}{\varrho_\nu}, \text{ und dies konvergiert nach } \infty.$$

Es folgt also:

Nimmt man die reelle Zahl $t > 1$, welche in den Voraussetzungen von Hilfssatz 10 beliebig vorgegeben ist, so kann man immer noch durch geeignete Wahl von n, l und s erreichen, daß $\nu(\bar{z}) \geqq C_{13}(n, l, s\ Q_\nu^{(l)}, a, S_3(a), t, g) \cdot |\bar{z}|^{t+1}$ mit $C_{13} > 0$ für alle $|\bar{z}| > S_4$ gilt.

Andererseits ist aber nach $(^*_*)$:

$$\nu(\bar{z}) \leqq |\bar{z}|^t \text{ für alle } |\bar{z}| > S_4.$$

Aus beiden Ungleichungen zusammen folgt: $1 \geqq C_{13} \cdot |\bar{z}|$. Insgesamt hat sich also ergeben:

$$|\bar{z}| \leqq \max(S_4, C_{13}^{-1}).$$

Damit ist der Hilfssatz 10 bewiesen.

Definition 10. Man habe nunmehr eine Puiseux-Reihe $\varphi(z)$ vorgelegt. Es sei z eine komplexe Zahl aus dem Konvergenzbereich $\mathfrak{B}$ von φ und

$\varphi(z) = \xi$ eine algebraische Zahl. Dann existieren also die beiden Zahlen $\gamma(\xi)$ und $\mu(\xi, z)$. Dann setzen wir:

$$\sigma(z) = \max(\tau(z), \gamma(\xi), \mu(\xi, z)).$$

Ist z aus $\mathfrak{B}$, aber $\varphi(z) = \xi$ eine transzendente Zahl, so setzen wir:

$$\sigma(z) = \infty.$$

Ist schließlich z nicht in $\mathfrak{B}$, so setzen wir etwa $\sigma(z)$ beliebig als reelle Zahl fest.

Dann gilt der folgende

Satz 1. Die Puiseux-Reihe $\varphi(z)$ sei transzendent. In der Bedeutung der r_s aus Hilfssatz 9 sei

$$\underline{\lim}\, \frac{r_s}{s} = 0.$$

Dann gilt
$$\lim_{z \to \infty} \sigma(z) = \infty.$$

Denn ist $\sigma(z) \leqq S$ und z aus $\mathfrak{B}$, so folgt ja: $\varphi(z) = \xi$ ist algebraisch und es ist $\tau(z) \leqq S$, $\gamma(\xi) \leqq S$ und $\mu(\xi, z) \leqq S$. Also folgt nach Hilfssatz 10 die Beschränktheit dieser z-Menge, d. h. es ist $\lim\limits_{z \to \infty} \sigma(z) = \infty$.

§ 3. Algebraische Funktionen.

Es soll nun gezeigt werden, daß dies ganz anders ist, wenn $\varphi(z)$ eine algebraische Funktion ist.

Wir wollen uns zunächst beim Hilfssatz 1 von einzelnen Voraussetzungen befreien.

Es gilt:

Hilfssatz 11. Man habe ein Polynom $f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} c_\nu \cdot x^\nu$ vom Effektivgrad n, d. h. also $c_n \neq 0$.

Dann erfüllt jede Wurzel ξ von $f(x)$ die Ungleichung:

$$|\xi| \leqq |c_n^{-1}| \cdot n \cdot \omega(f).$$

Denn da offenbar $f(x)$ und $c_n^{-1} \cdot f(x)$ dieselben Wurzeln haben und $\omega(c_n^{-1} \cdot f(x)) = |c_n^{-1}| \cdot \omega(f(x))$ ist, so folgt Hilfssatz 11 unmittelbar aus Hilfssatz 1.

Also folgt:

Hilfssatz 12. Man habe ein Polynom $f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} c_\nu \cdot x^\nu$ vom Effektivgrad $k \leqq n$, (d. h. also $c_n = c_{n-1} = \cdots = c_{k+1} = 0$, $c_k \neq 0$).

Dann erfüllt jede Wurzel ξ von $f(x)$ die Ungleichung:

$$|\xi| \leqq |c_k^{-1}| \cdot n \cdot \omega(f).$$

Nun betrachte man m verschiedene Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ von $f(x)$. Wir wollen die ν-te elementarsymmetrische Funktion σ_ν derselben abschätzen. Hierfür folgt offenbar:

$|\sigma_\nu| \leqq (|c_k^{-1}| \cdot n \cdot \omega(f))^\nu \cdot \binom{m}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$. Man erhält also:

$$|\sigma_\nu| \leqq |c_k^{-\nu}| \cdot (\omega(f))^\nu \cdot C_1(n). \text{ —}$$

Wir können nun leicht die Höhe eines jeden Teilers $g(x)$ von $f(x)$ mittels der Höhe von $f(x)$ abschätzen.

Hilfssatz 13. Man habe ein Polynom $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \cdot x^\nu$ vom Effektivgrad k. Es sei das Polynom $g(x)$ ein Teiler von $f(x)$. Es sei A der höchste nicht verschwindende Koeffizient von $g(x)$. Dann folgt $\omega(g) \leq |A| \cdot |c_k^{-n}| \times \times (\omega(f))^n \cdot C_{\mathrm{I}}(n)$.

Denn es ist ja $|c_k^{-1}| \cdot \omega(f) \geq 1$.

Hilfssatz 14. Es sei $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \cdot x^\nu$ ein Polynom mit ganz rationalen Koeffizienten (und vom Effektivgrad k). Es sei $g(x)$ ein Teiler von $f(x)$ im Ring der Polynome mit ganz rationalen Koeffizienten. Dann folgt:

$$\omega(g) \leq (\omega(f))^n \cdot C_{\mathrm{I}}(n).$$

Denn es ist in der Bezeichnung von Hilfssatz 13 ja $|A| \leq |c_k|$, folglich, da $c_k \neq 0$ und ganz rational ist, $|A| \cdot |c_k^{-n}| \leq 1$. —

Es sei $\varphi(z)$ eine Puiseux-Reihe mit algebraischen Koeffizienten und mit dem Konvergenzbereich $\mathfrak{B}$. *Im folgenden sei diese Reihe eine algebraische Funktion.* Dann gibt es nach Hilfssatz 6 ein Polynom $F(z, w)$ in den beiden Unbestimmten z und w mit ganz rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten, so daß

$$F(z, \varphi(z)) = 0$$

für alle z aus $\mathfrak{B}$ gilt. Die Koeffizienten der Potenzen von w in $F(z, w)$ seien als zu einander teilerfremde Polynome von z gewählt. Die Grade des Polynoms $F(z, w)$ in z, w seien l, n.

Dann gilt:

Hilfssatz 15. Es sei $\bar{z}$ eine nicht singuläre, algebraische Zahl aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}_t$. Dann ist $\varphi(\bar{z}) = \xi$ eine algebraische Zahl, und zwar ist $\gamma(\xi) \leq n \cdot t$.

Denn die Konjugierten von z seien $\bar{z}' = \bar{z}, \bar{z}'', \ldots, \bar{z}^{(\varkappa)}$. Dann setze man $F(\bar{z}, w) \cdot F(\bar{z}'', w) \cdot \cdots \cdot F(\bar{z}^{(\varkappa)}, w) = F^*(w)$. Nun ist $F^*(w)$ ein Polynom des Grades $\leq n \cdot t$ mit rationalen Koeffizienten, die nicht sämtlich verschwinden, und natürlich ist $F^*(\xi) = 0$, da der erste Faktor $F(\bar{z}, \xi) = 0$ ist. Also folgt: $\gamma(\xi) \leq n \cdot t$.

Wir betrachten jetzt näher unser $F(z, w)$. Ausführlich geschrieben, ist also $F(z, w) = \sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(l)}(z) \cdot w^\nu$. Nun denken wir uns eine algebraische Zahl $\bar{z}$ aus $\mathfrak{B}$, $|\bar{z}| > 1$ fest gewählt.

Es sei B das Maximum der Beträge aller Koeffizienten von $Q_0^{(l)}(z)$, $Q_1^{(l)}(z), \ldots, Q_n^{(l)}(z)$. Es ist also B eine bestimmte natürliche Zahl, da die Koeffizienten der $Q_\nu^{(l)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ ganz rational sind und nicht sämtlich verschwinden. Dann folgt zunächst für das Polynom $F(\bar{z}, w)$ in w: $\omega(F(\bar{z}, w)) \leq B \cdot |\bar{z}|^l \cdot (l + 1)$. Wir denken uns nun ein Polynom in w mit einem zu dem Koeffizientensystem von $F(\bar{z}, w)$ konjugierten Koeffizientensystem gewählt. Dies hat, da die Koeffizienten der $Q_\nu^{(l)}$ rational sind, die Gestalt $F(\bar{z}', w)$, wobei $\bar{z}'$ eine Konjugierte zu $\bar{z}$ bedeutet.

Es folgt:

Hilfssatz 16. $\omega(F(\bar{z}', w)) \leqq B \cdot |\bar{z}|^{l \cdot t} \cdot t^l \cdot (l+1) = |\bar{z}|^{l \cdot t} \cdot C_{II}(F, t, l)$ mit $C_{II} \geqq 1$.

Denn nach Hilfssatz 3 und wegen $|\bar{z}| > 1$ ist zunächst $|\bar{z}'| \leqq |\bar{z}|^t \cdot t$. Ist dann $|\bar{z}'| > 1$, haben wir soeben bewiesen: $\omega(F(\bar{z}', w)) \leqq B \cdot |\bar{z}'|^l \cdot (l+1)$. Zusammen mit $|\bar{z}'| \leqq |\bar{z}|^t \cdot t$ folgt dann unsere Behauptung. Im übrigbleibenden Falle $|\bar{z}'| \leqq 1$ ist natürlich: $|Q_\nu^{(l)}(\bar{z}')| \leqq B \cdot (l+1)$ für $\nu = 0, 1, \ldots, n$. Somit ist

$$\omega(F(\bar{z}', w)) \leqq B \cdot (l+1) \leqq B \cdot |\bar{z}|^{l \cdot t} \cdot t^l \cdot (l+1).$$

Also folgt in jedem Falle der Hilfssatz 16. —

Nunmehr bilden wir das Produkt $\prod_\varkappa F(\bar{z}^{(\varkappa)}, w) = F^*(w)$ mittels aller Konjugierten zu $\bar{z}$, einschließlich $\bar{z}$ selber. Dann ist $F^*(w)$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten, die nicht sämtlich verschwinden. Der Grad dieses Polynoms ist offenbar $\gamma(\bar{z}) \cdot n \leqq t \cdot n$. Mittels Hilfssatz 16 folgt:

Hilfssatz 17. $\omega(F^*(w)) \leqq |\bar{z}|^{l \cdot t^2} \cdot (C_{II}(F, t, l))^t \cdot (n+1)^t =$
$$= |\bar{z}|^{l \cdot t^2} \cdot C_{III}(F, t, l) \text{ mit } C_{III} \geqq 1.$$

Multipliziert man $F^*(w)$ noch mit dem Generalnenner $(\nu(\bar{z}))^{l \cdot t}$, auf welchen sich seine Koeffizienten gewiß bringen lassen, so ergibt sich das folgende Polynom mit nunmehr ganz rationalen Koeffizienten

$$F^{**}(w) = (\nu(\bar{z}))^{l \cdot t} \cdot F^*(w)$$

vom Grade $t \cdot n$.

Zunächst folgt aus Hilfssatz 17:

$$\omega(F^{**}(w)) \leqq (\nu(\bar{z}))^{l \cdot t} \cdot |\bar{z}|^{l \cdot t^2} \cdot C_{III}(F, t, l).$$

Ferner ist $\nu(\bar{z}) \leqq \omega(\bar{z}) = |\bar{z}|^\eta \leqq |\bar{z}|^t$. Setzt man noch $\varphi(\bar{z}) = \xi$, so ist natürlich $F^{**}(\xi) = 0$, und es folgt daher mittels Hilfssatz 14:

$$\omega(\xi) \leqq (\omega(F^{**}))^{t \cdot n} \cdot C_I(t, n) \leqq |\bar{z}|^{2 \cdot l \cdot t^2 \cdot t \cdot n} \cdot C_{IV}(F, t, l, n),$$

also, sofern unser $\bar{z}$ die Ungleichung

$$|\bar{z}| \geqq S_I$$

erfüllt für eine bestimmte (hinreichend große) reelle Zahl $S_I = S_I(\mathfrak{B}, F, t, l, n)$,

$$\omega(\xi) \leqq |\bar{z}|^{2 \cdot l \cdot t^3 \cdot n + 1}.$$

Also folgt in der Bezeichnung von Definition 9:

Hilfssatz 18. $\qquad \mu(\xi, \bar{z}) \leqq 2 \cdot l \cdot t^3 \cdot n + 1$

für alle algebraischen $\bar{z}$ aus $\mathfrak{B}$, für welche gilt $|\bar{z}| \geqq S_I$.

Dann folgt:

Satz 2. Man habe eine Puiseux-Reihe $\varphi(z)$ mit algebraischen Koeffizienten. $\varphi(z)$ sei eine algebraische Funktion. Man betrachte alle Zahlen $\bar{z}$ eines festen $\mathfrak{M}_t$.

Dann gibt es in der z-Ebene einen Kreis, so daß $\sigma(z) = \max(\tau(z), \gamma(\varphi(z)), \mu(\varphi(z), z))$ für alle $\bar{z}$ aus $\mathfrak{M}_t$ außerhalb dieses Kreises beschränkt ist.

Denn zunächst ist $\tau(\bar{z}) \leqq t$, da $\bar{z}$ in $\mathfrak{M}_t$ liegt. Man setze $\varphi(z) = \xi$. Weiter ist dann $\gamma(\xi) \leqq n \cdot t$ nach Hilfssatz 15. Die Menge der $\gamma(\xi)$ ist also für alle unsere $\bar{z}$ beschränkt. Schließlich ist auch $\mu(\xi, \bar{z})$ für alle $\bar{z}$, die gleichzeitig zu $\mathfrak{M}_t$ und $\mathfrak{B}$ gehören und für welche $|\bar{z}| \geqq S_I$ ist, nach Hilfssatz 18 beschränkt. Also folgt zusammen der Satz 2.

Die Sätze 1 und 2 liefern Kriterien dafür, ob die untersuchte Reihe transzendent oder algebraisch ist. Wir können diese nun, indem wir uns auf die Aufteilung der Puiseux-Reihen nach den in ihnen tatsächlich auftretenden höchsten Exponenten einlassen, wesentlich schärfer gestalten.

§ 4. Entscheidung allein auf Grund des Wertevorrates.

Wir interessieren uns nun für den höchsten Exponenten, mit welchem unsere Reihe $\varphi(z)$ tatsächlich beginnt. Es sei also $\varphi(z) = a_k \cdot z^{\frac{k}{q}} + a_{k-1} \times \times z^{\frac{k-1}{q}} + \cdots$, jetzt aber sei vorausgesetzt, daß $a_k \neq 0$ ist. Wenn dann $k \geqq 1$ ist, sagen wir, $\varphi(z)$ sei vom Typus I, wenn $k \leqq -1$ ist, vom Typ II, und wenn $k = 0$ ist, die Reihe also mit einer Konstanten $\neq 0$ beginnt, sie sei vom Typ III. Wir werden nun sehen, daß die Sätze 1 und 2 für den Fall, daß $\varphi(z)$ nicht vom Typ III ist, sich wesentlich einfacher darstellen lassen. Die Betrachtung von Reihen vom Typ III werden wir demgemäß zurückführen auf die Betrachtung solcher vom Typ I oder II.

Sei nun also $\varphi(z)$ vom Typ I oder II. Der Konvergenzbereich $\mathfrak{B}$ sei nicht leer. Wir erinnern uns nun an die Begriffe $\eta(\xi)$ und $\mu(\xi, z)$, die beide einen Sinn haben, wenn z aus $\mathfrak{B}$ und $\varphi(z) = \xi$ algebraisch und nicht singulär ist. Dann denke man sich eine Folge von Zahlen z_ν, welche nach ∞ konvergiert, und nehme an, daß für jedes dieser z_ν der Wert $\varphi(z_\nu) = \xi_\nu$ algebraisch ist. Natürlich folgt dann aus $\lim \varphi(z_\nu) = \infty$, wenn $\varphi(z)$ vom Typ I, und aus $\lim \varphi(z_\nu) = 0$, wenn $\varphi(z)$ vom Typ II ist, daß die ξ_ν von einer Stelle ν ab nicht singulär sind. Also existieren von dieser Stelle ab $\eta(\xi_\nu)$ und $\mu(\xi_\nu, z_\nu)$. Man sieht dann sofort, etwa durch Ausklammern der höchsten Potenz $z^{\frac{k}{q}}$ von $\varphi(z)$, auf Grund der Definition von $\eta(\xi)$ und $\mu(\xi, z)$ ein:

Hilfssatz 19. $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{\mu(\xi_\nu, z_\nu)}{\eta(\xi_\nu)}$ existiert und ist positiv.

$\left(\text{Der Limes ist nämlich } \frac{|k|}{q}\right)$.

Wir erinnern uns nun an die Definition 10 von $\sigma(z)$. Wir beziehen uns darauf und definieren jetzt eine Funktion $\sigma^*(z)$, welche zu $\sigma(z)$ in der Beziehung steht, daß wir dort, wo in $\sigma(z)$ das $\mu(\xi, z)$ auftritt, dies jetzt durch $\eta(\xi)$ ersetzen.

Definition 11. Man habe eine Puiseux-Reihe $\varphi(z)$ vorgelegt. Es sei z eine komplexe Zahl aus dem Konvergenzbereich $\mathfrak{B}$ von φ, $\varphi(z) = \xi$ eine algebraische, nicht singuläre Zahl. Dann existieren also die beiden Zahlen $\gamma(\xi)$ und $\eta(\xi)$. Dann setzen wir:

$$\sigma^*(z) = \max(\tau(z), \gamma(\xi), \eta(\xi)).$$

Ist z aus $\mathfrak{B}$, aber $\varphi(z) = \xi$ eine transzendente Zahl, so setzen wir:

$$\sigma^*(z) = \infty.$$

Ist schließlich z nicht in $\mathfrak{B}$ oder $\varphi(z)$ eine singuläre algebraische Zahl, so setzen wir etwa $\sigma^*(z)$ beliebig als reelle Zahl fest.

Offenbar ist also $\sigma^*(z)$, falls z eine Zahl aus $\mathfrak{B}$ und ξ algebraisch und nicht singulär ist, das Maximum der beiden Zahlen $\tau(z)$, $\tau(\xi)$.

Aus Hilfssatz 19 ergibt sich dann ohne weiteres der folgende

Hilfssatz 20. Für jede Zahlenfolge $z_\nu \to \infty$ gilt: Die beiden Zahlenfolgen $\sigma(z_\nu)$ und $\sigma^*(z_\nu)$ konvergieren beide nach ∞, wenn es für eine von ihnen zutrifft, und es sind beide beschränkt, falls eine von ihnen beschränkt ist.

Dann folgen aus Satz 1 und Satz 2 unmittelbar die folgenden Sätze 3 und 4:

Satz 3. Man habe eine Puiseux-Reihe $\varphi(z)$ *vom Typ* I *oder* II. *Sie sei eine transzendente Funktion. Es sei noch* $\underline{\lim}\, \frac{r_s}{s} = 0$. *Dann folgt*

$$\lim_{z\to\infty} \sigma^*(z) = \infty\,.$$

Satz 4. *Man habe eine Puiseux-Reihe* $\varphi(z)$ *mit algebraischen Koeffizienten vom Typ* I *oder* II. *Sie sei eine algebraische Funktion. Dann gibt es zu jedem festen* $\mathfrak{M}_t$ *einen Kreis in der z-Ebene, so daß* $\sigma^*(z)$ *für alle z aus* $\mathfrak{M}_t$ *außerhalb dieses Kreises beschränkt ist.*

Offenbar kann man Reihen vom Typ III durch Subtraktion des Koeffizienten a_0 von $\varphi(z)$ auf Reihen vom Typ II zurückführen.

Dann ergibt sich unmittelbar aus den Sätzen 3 und 4 das folgende Ergebnis, welches vielleicht als etwas umständlich formuliert erscheint. Dies ist so formuliert, um ganz deutlich zu machen, daß und in welchem Sinne die Entscheidung über den algebraischen Charakter der vorgelegten Funktion allein mittels des Wertevorrates getroffen werden kann (also ohne Benutzung der Bindung der Werte von φ an die Argumente z).

Satz 5. Man habe eine Puiseux-Reihe $\varphi(z) = a_k \cdot z^{\frac{k}{q}} + a_{k-1} \cdot z^{\frac{k-1}{q}} + \cdots$ *mit algebraischen Koeffizienten. In der Bedeutung der* r_s *aus Hilfssatz 9 sei* $\underline{\lim}\, \frac{r_s}{s} = 0$. *Man kenne nun den Wertebereich* $\mathfrak{W}$ *von* $\varphi(z)$ *für irgendeine nach* ∞ *konvergierende Menge von Zahlen aus einem festen* $\mathfrak{M}_t$, (*z. B. für die Menge der natürlichen Zahlen*). *Dadurch ist bestimmt, ob die Reihe vom Typ* I *oder* II *oder* III *ist, je nachdem nämlich, ob ihr Grenzwert der unendlich ferne Punkt,* 0 *oder ein eigentlicher Punkt* $\neq 0$ *ist. Liegt Typ* III *vor, so ist das konstante Glied, mit dem die Reihe beginnt, als Grenzwert des Wertbereiches* $\mathfrak{W}$ *bekannt. Indem man ihn jeweils von den Zahlen des Wertbereiches* $\mathfrak{W}$ *subtrahiert, geht man über zu der Reihe vom Typ* II, *die entsteht, wenn man in der vorgegebenen Reihe das konstante Glied streicht. Für Reihen vom Typ* I *oder* II *aber hat sich ergeben:*

Die Menge $\mathfrak{W}$ *hat genau einen Häufungspunkt, und zwar* ∞ *oder* 0. *Man ordne jedem Wert w aus* $\mathfrak{W}$ *seinen Transzendenzgrad* $\tau(w)$ *zu. Dann ist die Transzendenz der Funktion* $\varphi(z)$ *gleichbedeutend mit der Aussage* $\lim \tau(w)$ *(an der einzigen Häufungsstelle von* $\mathfrak{W}$*) ist* ∞, *das Algebraischsein von* $\varphi(z)$ *gleichbedeutend mit:* $\tau(w)$ *ist in jeder hinreichend engen Umgebung des Häufungspunktes von* $\mathfrak{W}$ *beschränkt.*

Z. B. folgt aus dem Satze: Hat die transzendente Puiseux-Reihe $\varphi(z)$ algebraische Koeffizienten aus einem endlichen algebraischen Zahlkörper, so gibt es zu je zwei reellen Zahlen t_1, t_2 einen Kreis $\mathfrak{K}$ um den komplexen Nullpunkt, so daß gilt: φ nimmt für keinen Wert, der in $\mathfrak{M}_{t_1}$ und außerhalb $\mathfrak{K}$ liegt, einen Wert aus $\mathfrak{M}_{t_2}$ an.

Denn für Reihen des Typ I und II folgt es aus unserem Satz und für Reihen des Typ III ist es fast ohne weiteres klar.

Für den Fall, daß sich die untersuchte Funktion als algebraisch ergibt, lassen sich häufig Angaben über den Grad derselben machen. Dies wird demnächst, zusammen mit anderen Anwendungen, mitgeteilt werden. Z. B. ergibt sich als Antwort auf die in der Einleitung erwähnte von Strauss gestellte Frage: Damit eine Puiseux-Reihe mit rationalen Koeffizienten eine rationale Funktion ist, ist notwendig und hinreichend, daß sie für unendlich viele ganz rationale Werte (auch: für alle ganzen rationalen Werte ihres Konvergenzbereiches) rationale Werte annimmt von beschränktem Transzendenzgrade.

Den oben abgeleiteten Sätzen völlig analoge ergeben sich als Antwort auf die allgemeinere Frage, wann zwei vorgelegte Puiseux-Reihen mit algebraischen Koeffizienten algebraisch abhängig sind. Dies soll demnächst mitgeteilt werden.

(Eingegangen am 10. Januar 1950.)

Math. Annalen, Bd. 122, S. 276—278 (1950).

Zur Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Über eine Zerlegung analytischer Funktionen und die Weilsche Integraldarstellung.

Von

HANS HEFER †[1]) in Münster (Westf.).

ANDRÉ WEIL hat für analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen eine verallgemeinerte Cauchysche Integralformel angegeben, durch welche eine reguläre Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ im Innern eines analytischen Polyeders $\mathfrak{P}$ mittels ihrer Werte auf den n-dimensionalen Kanten von $\mathfrak{P}$ dargestellt werden kann[2]). Dabei wird unter einem analytischen Polyeder $\mathfrak{P}$ eine wie folgt zu beschreibende Punktmenge des R^{2n} verstanden: In den Ebenen der Variablen z_i seien beschränkte Gebiete $\mathfrak{D}_i$ mit stückweise glatten Rändern $\mathfrak{R}_i$ gegeben; es sei gesetzt $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{D}_i + \mathfrak{R}_i$. Ferner seien $\chi_i((z)), i = 1, 2, \ldots, m$, Funktionen, die sämtlich in einem schlichten Gebiet $\mathfrak{D}$ des R^{2n} regulär und eindeutig sind. Es wird sodann die Gesamtheit der Punkte $((z))$ betrachtet, die den Bedingungen

$$((z)) \in \mathfrak{D}, \ \chi_i((z)) \in \mathfrak{p}_i$$

genügt; eine zusammenhängende Komponente dieser Punktmenge oder die Vereinigung mehrerer solcher Komponenten, *falls diese ganz in $\mathfrak{D}$ liegen*, heißt ein analytisches Polyeder $\mathfrak{P}$. Zur Anwendung der WEILschen Integraldarstellung muß nun wesentlich vorausgesetzt werden, daß die Funktionen $\chi_i((z))$ eine Zerlegung der folgenden Art gestatten:

$$\chi_i((z)) - \chi_i((\zeta)) = \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - \zeta_\nu) \cdot P_{i\nu}((z); (\zeta)), \tag{1}$$

hierbei bedeuten die $P_{i\nu}((z); (\zeta))$ in $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ reguläre eindeutige Funktionen von $z_1, \ldots, z_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$; sie gehen explizit in die Integralformel ein. A. WEIL bemerkt, daß Zerlegungen der Gestalt (1) jedenfalls dann existieren, wenn die $\chi_i((z))$ Polynome oder rationale Funktionen oder Grenzfunktionen gleichmäßig konvergenter Folgen solcher Funktionen sind. Es ist aber bekannt, daß im Raume mehrerer komplexer Veränderlichen keineswegs in jedem vorgegebenen schlichten Regularitätsgebiete[3]) eine dort eindeutige reguläre

[1]) Der Verfasser ist 1941 im Osten gefallen. Die vorliegende Arbeit stellt einen Auszug aus seiner Dissertation dar, die 1940 in Münster vorgelegen hat. — Seit 1941 sind Arbeiten von K. OKA und H. CARTAN erschienen, die das Resultat von H. HEFER enthalten, jedoch andersartige Beweismittel benutzen: K. OKA: Jap. J. Math. **7**, 523 (1941); CARTAN, H.: Ann. Sci. Ecole norm. Sup. III, **61**, 149 (1944).

Die Unterzeichneten halten die Veröffentlichung des HEFERschen Beweises wegen seiner auffallenden Einfachheit auch im gegenwärtigen Zeitpunkt für gerechtfertigt.

H. BEHNKE, K. STEIN.

[2]) WEIL, ANDRÉ: C. R. **194**, 1304 (1932). — Math. Ann. **111**, 178 (1935).

[3]) Zur Theorie der Regularitätsgebiete sowie zu den weiteren, hier nicht näher erläuterten Begriffen der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen siehe H. BEHNKE u. P. THULLEN: Erg. Math. **3**, 3 (1934).

Funktion durch Polynome oder rationale Funktionen im Großen gleichmäßig approximiert werden kann[4]). So war die Frage offen geblieben, ob die WEILsche Integralformel auch in den Fällen anwendbar bleibt, wo die das analytische Polyeder charakterisierenden $\chi_i((z))$ nicht zu den angegebenen Funktionenklassen gehören. Wenn aber in einem analytischen Polyeder $\mathfrak{P}$ eine WEILsche Integraldarstellung möglich ist, so kann für $\mathfrak{P}$ ein Analogon des RUNGEschen Satzes abgeleitet werden. Aus diesem Grunde ist die Frage nach der Möglichkeit einer Zerlegung (1) analytischer Funktionen in vorgegebenen Gebieten von besonderer Wichtigkeit für die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen.

Es soll nun gezeigt werden, daß in allen schlichten endlichen Regularitätsgebieten $\mathfrak{G}$ in der Tat die in $\mathfrak{G}$ regulären eindeutigen Funktionen solche Zerlegungen (1) zulassen. Da die offenen Komponenten von analytischen Polyedern insbesondere Regularitätsgebiete sind und jedes analytische Polyeder sich durch ganz umfassende analytische Polyeder approximieren läßt, so wird damit bewiesen sein: *Die WEILsche Integraldarstellung analytischer Funktionen ist in allen analytischen Polyedern des R^{2n} möglich.*

Wir benötigen einen Hilfssatz:

Sei $\mathfrak{G}$ ein schlichtes endliches Regularitätsgebiet und $\mathfrak{E}^{(2n-2)}$ eine $\mathfrak{G}$ treffende $(2n-2)$-dimensionale analytische Ebene. In den Punkten des Durchschnittes $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}^{(2n-2)}$ sei als Funktion auf $\mathfrak{E}^{(2n-2)}$ eine reguläre eindeutige Funktion φ vorgegeben. (Besteht $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}^{(2n-2)}$ aus mehreren Komponenten $\mathfrak{D}_j$, so soll in jedem $\mathfrak{D}_j$ eine reguläre eindeutige Funktion φ_j vorgegeben sein.) Dann gibt es eine in $\mathfrak{G}$ reguläre eindeutige Funktion Φ, die auf $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}^{(2n-2)}$ mit φ übereinstimmt.

Zum Beweise darf angenommen werden, daß $\mathfrak{E}^{(2n-2)}$ die Ebene $z_1 = 0$ ist; die Funktion φ ist dann als Funktion der Variablen $z_2, \ldots, z_n$ allein zu schreiben: $\varphi(z_2, \ldots, z_n)$. In $\mathfrak{G}$ wird nun eine COUSINsche Verteilung meromorpher Ortsfunktionen mit Äquivalenz in bezug auf Subtraktion[5]) wie folgt vorgegeben: Liegt der Punkt P innerhalb $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{E}^{(2n-2)}$, so werde P eine Hyperkugelumgebung $\mathfrak{U}(P)$ so zugeordnet, daß $\mathfrak{U}(P)$ nur Punkte von $\mathfrak{G}$ enthält; in $\mathfrak{U}(P)$ werde

$$f_P = \frac{\varphi(z_2, \ldots, z_n)}{z_1}$$

als Lokalfunktion vorgeschrieben. Liegt P nicht auf $\mathfrak{E}^{(2n-2)}$, aber innerhalb $\mathfrak{G}$, so sei als P zuzuordnende Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ eine P enthaltende Hyperkugel gewählt, die ganz in $\mathfrak{G}$ liegt, aber $\mathfrak{E}^{(2n-2)}$ nicht trifft; in diesem Falle sei $f_P \equiv 0$. Nach K. OKA ist in $\mathfrak{G}$ das erste COUSINsche Problem[6]) lösbar. Es gibt also eine in $\mathfrak{G}$ meromorphe eindeutige Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$, so daß jeweils in $\mathfrak{U}(P)$ die Differenz $R_P = f_P - F$ regulär ist. Die Funktion

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) \equiv z_1 \cdot F(z_1, \ldots, z_n)$$

ist dann eine gesuchte Funktion: Es gilt jeweils in $\mathfrak{U}(P)$

$$z_1 \cdot F = z_1 \cdot f_P - z_1 \cdot R_P;$$

dies ist für alle $P \in \mathfrak{G}$ regulär und stimmt für $z_1 = 0$ mit $\varphi(z_2, \ldots, z_n)$ überein.

[4]) BEHNKE, H. u. K. STEIN: Göttinger Nachr., N. F. I (1939). STEIN, K.: Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss. **1939**, 139; Math. Ann. **117**, 727 (1941).

[5]) Zum COUSINschen Problemkreis, vgl. H. BEHNKE u. K. STEIN: Jber. dtsch. Math.-Ver. **47**, 177 (1937).

[6]) OKA, K.: J. Sci. Hiroshima Univ. A, **7**, Nr. 2, 115 (1937).

Nunmehr können wir den folgenden Satz beweisen:

Das schlichte endliche Regularitätsgebiet $\mathfrak{G}$ im R^{2n} habe mit der analytischen $2(n-k)$-dimensionalen Ebene $\mathfrak{E}^{2(n-k)}: \{z_1 = \cdots = z_k = 0\}$ einen nicht leeren Durchschnitt ($n \geq 1, 1 \leq k \leq n$). In $\mathfrak{G}$ sei eine reguläre eindeutige Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ vorgegeben, die auf $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}^{2(n-k)}$ verschwinde. Dann existiert in $\mathfrak{G}$ eine Darstellung

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\nu=1}^{k} z_\nu \cdot Q_\nu(z_1, \ldots, z_n), \tag{2}$$

wo die $Q_\nu(z_1, \ldots, z_n)$ in $\mathfrak{G}$ eindeutige reguläre Funktionen darstellen.

Wir wenden vollständige Induktion an: 1. Die Behauptung ist sicher richtig für $k = 1$ und beliebiges n. — 2. Die Behauptung gelte für $k-1$ und beliebiges $n \geq k$. Wir schneiden $\mathfrak{G}$ mit der analytischen Ebene $\mathfrak{E}_k^{(2n-2)}$: $\{z_k = 0\}$. Der Durchschnitt $\mathfrak{D} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}_k^{(2n-2)}$ besteht aus einem oder mehreren $(2n-2)$-dimensionalen Regularitätsgebieten im Raume der Veränderlichen $z_1, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_n$; denn mit $\mathfrak{G}$ sind auch alle Komponenten $\mathfrak{D}_j$ von $\mathfrak{D}$ regulär-konvex. Die in $\mathfrak{G}$ vorgegebene Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ ist laut Voraussetzung insbesondere in $\mathfrak{D}$ regulär und eindeutig, sie verschwindet dort auf den Punkten der Ebene $\{z_1 = \cdots = z_{k-1} = 0\}$. Also existiert in $\mathfrak{D}$ (bzw. in jedem $\mathfrak{D}_j$) nach Induktionsvoraussetzung eine Darstellung

$$f = \sum_{\nu=1}^{k-1} z_\nu \cdot Q_\nu^*(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_n); \tag{3}$$

dabei sind die Q_ν^* in $\mathfrak{D}$ regulär (bzw. sie bestehen aus jeweils in $\mathfrak{D}_j$ regulären und eindeutigen Funktionen). Auf Grund des Hilfssatzes gibt es in $\mathfrak{G}$ eindeutige reguläre Funktionen $Q_\nu(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_n)$, $\nu = 1, \ldots, k-1$, die auf $\mathfrak{D}$ mit den dort gegebenen Q_ν^* übereinstimmen. Wir bilden die in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion

$$\Psi(z_1, \ldots, z_n) = f(z_1, \ldots, z_n) - \sum_{\nu=1}^{k-1} z_\nu \cdot Q_\nu(z_1, \ldots, z_n). \tag{4}$$

Ψ verschwindet wegen (3) auf $z_k = 0$ innerhalb $\mathfrak{G}$. Nach Induktionsschritt 1. existiert eine in $\mathfrak{G}$ eindeutige reguläre Funktion $Q_k(z_1, \ldots, z_n)$, so daß in $\mathfrak{G}$

$$\Psi(z_1, \ldots, z_n) = z_k \cdot Q_k(z_1, \ldots, z_n) \tag{5}$$

gilt. (4) und (5) ergeben aber eine gesuchte Darstellung (2), w. z. b. w.

Sei nun im schlichten endlichen Regularitätsgebiet $\mathfrak{G}$ des R^{2N} eine dort reguläre eindeutige Funktion $\chi(z_1, \ldots, z_N)$ gegeben. Beachtet man, daß mit $\mathfrak{G}$ stets auch das direkte Produkt $\mathfrak{G} = \tilde{\mathfrak{G}} \times \tilde{\mathfrak{G}}$ ein Regularitätsgebiet ist, so ergibt sich die Existenz einer Zerlegung

$$\chi(z_1, \ldots z_N) - \chi(\zeta_1, \ldots, \zeta_N) = \sum_{\nu=1}^{N} (z_\nu - \zeta_\nu) \cdot P_\nu(z_1, \ldots, z_N, \zeta_1, \ldots, \zeta_N)$$

in $\mathfrak{G}$ wie folgt: Man setze

$$z_\varkappa^* = z_\varkappa - \zeta_\varkappa, \quad z_{N+\varkappa}^* = z_\varkappa, \quad \varkappa = 1, \ldots, N,$$

und wende den soeben bewiesenen Satz mit $k = N$, $n = 2N$ an.

(Eingegangen am 23. Dezember 1949.)

Math. Annalen, Bd. 122, S. 279—295 (1950).

Zur tensoriellen Behandlung der projektiven Flächentheorie*).

Von

G. Bol in Freiburg i. Br.

Bekanntlich hat der Ricci-Kalkül die Mittel dazu geliefert, die Theorie der Flächen oder Hyperflächen in affinen Räumen bei Verwendung beliebiger Parameter einfach und übersichtlich zu gestalten.

Auch für die projektive Geometrie der Flächen sind entsprechende Formelsysteme aufgestellt worden, zuerst von G. Fubini[1]).

Eine sehr allgemeine Theorie, die auch die Räume mit projektivem Zusammenhang umfaßt, stammt von J. A. Schouten und J. Haantjes[2]). Von späteren Theorien nennen wir die von P. O. Bell[3]) und A. Norden[4]). Auch mit Hilfe des Kalküls der alternierenden Differentialformen ist die Aufgabe behandelt worden[5]).

Die Vielzahl der Theorien gibt schon einen Hinweis darauf, daß keine in jeder Hinsicht befriedigt. Es sind vor allem zwei Punkte, die die Schwierigkeiten bedingen. Der erste betrifft das Problem der *Normierung*.

Die Koordinaten

$$\mathfrak{x}\,(u^1, u^2) = \{x_0\,(u^1, u^2),\ x_1\,(u^1, u^2),\ x_2\,(u^1, u^2),\ x_3\,(u^1, u^2)\} \tag{1}$$

der Punkte einer Fläche im projektiven Raum sind ja nur bis auf Umnormierungen

$$\mathfrak{x}^* = \varrho\,\mathfrak{x} \tag{2}$$

mit einer beliebigen von Null verschiedenen Ortsfunktion $\varrho\,(u^1, u^2)$ auf der Fläche festgelegt, und es macht Schwierigkeiten, die Normierung in geeigneter Weise zu fixieren.

Die zweite Frage ist die der *Einspannung*. Naturgemäß wird man an jeder Stelle der Fläche eine Gerade $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, die den Flächenpunkt $\mathfrak{x}$ mit einem Punkt $\mathfrak{y}$ außerhalb der Tangentenebene verbindet, als Ersatz für die Normale der Fläche betrachten.

Man nennt eine solche Gerade eine *Normale erster Art*. Anwendung des Dualitätsprinzipes zeigt nämlich, daß Geraden, die in der Tangentenebene liegen und nicht durch den Flächenpunkt gehen, ähnliche Eigenschaften haben müssen, solche nennt man daher *Normalen zweiter Art*[6]).

*) Herrn Heinrich Tietze zum 70. Geburtstag am 31. August 1950 gewidmet.

[1]) Vgl. die Darstellung in G. Fubini u. E. Čech: Geometria Proiettiva differenziale, Kap. VI, Bologna 1936.

[2]) Comp. Math. **3**, 1—51 (1936). Hier wird eine p-dimensionale Mannigfaltigkeit in einem n-dimensionalen Raum mit Hilfe von $p+1$ homogenen Parametern dargestellt. Diese zweifellos sehr glückliche Idee hat aber bei der Anwendung auf zweidimensionale Flächen den Nachteil, daß man drei statt zwei Parameter mitschleppen muß, was hier doch erheblich ins Gewicht fällt.

[3]) Trans. amer. math. Soc. **60**, 20 (1946).

[4]) Rec. Math. Moscou **20**, 263 (1947). Vgl. auch A. I. Čahtauri, C. R. Acad. Sc. USSR **59**, 1254 (1948).

[5]) Vgl. G. Fubini u. E. Čech: Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, Kap. XIII, Paris 1931.

[6]) In der affinen Geometrie sind die Normalen zweiter Art die unendlich fernen Geraden der Tangentenebenen. Man könnte daher diese Normalen allgemein „Ferngeraden" nennen. Bei manchen Autoren werden die Normalen andersherum numeriert.

Es liegt nun auf der Hand, analog zu den Verhältnissen in der metrischen und affinen Geometrie nur solche Normalen jeder Art heranzuziehen, für die die Krümmungslinien, also die Kurven, längs derer die Normalen Torsen bilden, auf der Fläche ein konjugiertes Netz bilden. Man nennt solche Normalenkongruenzen zur Fläche *konjugiert*.

Bei konjugierten Normalenkongruenzen macht die Normierung keine Schwierigkeiten, und man gelangt so zu übersichtlichen und brauchbaren Formeln[7]).

Nach Fubini nennt man daher die einfachsten mit der Fläche invariant verknüpften konjugierten Normalen ihre *Projektivnormalen*[8]). Bei geometrischen Untersuchungen stellt sich aber bald heraus, daß diese Projektivnormalen zur Behandlung der weitaus meisten Fragen keineswegs besonders geeignet sind. So drängen sich für die Untersuchung der Hüllfläche der Lie-Quadriken einer Fläche, also ihrer Demoulinschen Tetraeder, die schon von E. J. Wilczynski eingeführten Direktrix geradezu[9]) auf, und diese bilden im allgemeinen keine konjugierten Kongruenzen.

Eine Theorie, die auch bei Verwendung nicht konjugierter Normalen zu wirklich befriedigenden Formeln führt, scheint bisher nicht aufgestellt zu sein. In dieser Note wollen wir zeigen, wie man auf Grund sehr einfacher geometrischer Betrachtungen zu Formeln gelangen kann, die auch für nicht konjugierte Normalensysteme brauchbar sind, die Fubinischen als Sonderfall umfassen und nicht komplizierter sind als diese.

Der besseren Übersicht halber sei das verwendete Verfahren schon hier mit kurzen Worten erörtert. Das Störende an den Umnormungen (2) ist vor allem, daß nach Differentiationen nicht nur ϱ, sondern auch die Ableitungen von ϱ, die keinerlei geometrischen Sinn haben, in die Formeln eingehen. Wir beseitigen nun diesen Mangel, indem wir statt der gewöhnlichen Differentiation ein verallgemeinertes Differentiationsverfahren verwenden[10]).

Ist nämlich ein Vektor s_λ gegeben, der von der Normierung des Punktes $\mathfrak{x}$ abhängt und bei Umnormierungen (2) nach

(3) $$s_\lambda^* = s_\lambda - \partial_\lambda (\log \varrho) \text{ [11])}$$

transformiert wird, so erklären wir die halbinvariante Ableitung von $\mathfrak{x}$ durch

(4) $$\mathfrak{x}_\lambda = \partial_\lambda \mathfrak{x} + s_\lambda \mathfrak{x}.$$

Bei Umnormungen (2) ist dann

(5) $$\mathfrak{x}_\lambda^* = \partial_\lambda (\varrho\, \mathfrak{x}) + s_\lambda^* (\varrho\, \mathfrak{x}) = \varrho\, \mathfrak{x}_\lambda,$$

so daß jetzt in den Transformationsformeln nur ϱ selbst eingeht.

Es ist nun sehr leicht, diesem Verfahren einen geometrischen Sinn beizulegen. Denken wir uns, daß in jeder Tangentenebene der Fläche (1) eine Normale zweiter Art gegeben ist. Bei fest gewählter Normierung kann man dann die s_λ durch die Forderung eindeutig festlegen, daß die Punkte $\mathfrak{x}_\lambda$ auf dieser Normalen liegen sollen.

[7]) Formeln für zwei beliebige konjugierte Normalenkongruenzen hat wohl zuerst W. Süss angegeben (unveröffentlicht).

[8]) Vgl. [1]), S. 92.

[9]) Vgl. [1]), S. 96.

[10]) Vgl. D. J. Struik: Erg. Math. 3, H. 2 (1934).

[11]) Das Symbol ∂_λ bedeutet Differentation nach u^λ.

Postuliert man dann, daß sich die s_λ bei Umnormungen (2) nach (3) verhalten sollen, so liegen die Punkte $\mathfrak{x}_\lambda^*$ nach (5) bei jeder Normierung auf der gegebenen Normalen.

Wir können die Normalen als Ersatz für die unendlich ferne Gerade unserer Ebene auffassen[12]). *Durch Vorgabe der „Ferngerade" in jeder Tangentenebene ist also ein halbinvariantes Differentiationsverfahren bestimmt, und umgekehrt gehört zu jedem solchen Differentiationsverfahren eindeutig eine Ferngeradenkongruenz.* Ist nun die Ferngeradenkongruenz konjugiert, so kann man die Normierung der Vektoren $\mathfrak{x}$ so fixieren, daß s_λ überall auf der Fläche verschwindet. Die halbinvariante Differentiation wird dann zur gewöhnlichen.

Hier zeigt sich also besonders deutlich, weshalb die konjugierten Kongruenzen sich leicht behandeln lassen.

Hervorgehoben sei schließlich, daß die Formeln, zu denen wir auf diesem Wege gelangen, als Sonderfall eine Flächentheorie in Asymptotenlinienparametern enthalten, die vom Verf. vor einigen Jahren angegeben wurde[13]).

§ 1. Pseudogrößen und halbinvariante Differentation.

Gegeben sei ein Raum A_n mit einer affinen Übertragung[14]). Es gelten also die Formeln[15])

(1) $$\nabla_\mu w_\lambda = \partial_\mu w_\lambda - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} w_\nu, \quad \nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} v^\lambda$$

(2) $$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$$

(3) $$2\,\nabla_{[\omega}\nabla_{\mu]} v^\nu = -\,R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, v^\lambda$$

(4) $$2\,\nabla_{[\omega}\nabla_{\mu]} w_\lambda = R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, w_\nu .$$

Wir interessieren uns für den Fall, daß Größen vorkommen, die nur bis auf einen von Null verschiedenen Faktor festgelegt sind. Es möge also etwa eine Umnormungsgruppe zugelassen sein, bei der gewisse Größen der Geometrie mit Potenzen einer beliebigen von Null verschiedenen Ortsfunktion ϱ multipliziert werden.

Ist für die Größe Φ[16]) bei unseren Umnormungen etwa

(5) $$\Phi^* = \Phi \cdot \varrho^c ,$$

so nennen wir Φ eine Pseudogröße vom Gewicht c. c kann eine beliebige reelle Zahl sein. Beispiele sind etwa die Koordinaten der Fläche (1) in der Einleitung oder der Fundamentaltensor in einer WEYLschen Geometrie, von dem unten die Rede sein wird.

Bei Differentiation ist

(6) $$\nabla_\mu \Phi^* = \varrho \cdot \nabla_\mu \Phi + \nabla_\mu \varrho \cdot \Phi .$$

In den Transformationsformeln für die kovariante Ableitung einer Pseudogröße gehen also die Ableitungen von ϱ ein, diese Ableitung ist also kein Pseudotensor. Dies ist unvorteilhaft, weil dieser Ableitung dadurch schwer

[12]) In der affinen Geometrie sind ja die $\partial_\lambda \mathfrak{x}$ Vektoren, d. h. man kann sie als unendlich ferne Punkte auffassen.

[13]) Vgl. § 5.

[14]) Die Einschränkung auf affine, also symmetrische und überschiebungsinvariante Übertragungen ist unwesentlich.

[15]) Für die Symbolik vgl. man J. A. SCHOUTEN: Der RICCI-Kalkül, Berlin 1924, weiterhin R. C. zitiert.

[16]) Wir lassen hier zunächst die Indices als unwesentlich weg.

ein geometrischer Sinn beizulegen ist. Wir wollen deshalb das Differentiationsverfahren so abändern, daß der Pseudogrößencharakter bei Differentiation erhalten bleibt[16]).

Dazu besteht die Möglichkeit, wenn uns ein Vektor s_μ zur Verfügung steht, der sich bei Umnormungen unserer Gruppe so verhält:

$$s^*_\mu = s_\mu - \partial_\mu \log \varrho\,. \tag{7}$$

Für die Größe

$$\overline{\nabla}_\mu \Phi = \nabla_\mu \Phi + c\, s_\mu \Phi \tag{8}$$

ist dann nämlich

$$(\overline{\nabla}_\mu \Phi)^* = \nabla_\mu \Phi^* + c\, s^*_\mu \Phi^* = \varrho^c (\nabla_\mu \Phi + c\, s_\mu \Phi) = \varrho^c\, \overline{\nabla}_\mu \Phi\,,$$

so daß $\overline{\nabla}_\mu \Phi$ wie Φ eine Pseudogröße vom Gewicht c ist.

Wir nennen $\overline{\nabla}_\mu \Phi$ die *halbinvariante Ableitung* der Größe Φ. Für die halbinvariante Ableitung gelten die üblichen Regeln; sind Φ und Ψ beliebige Pseudogrößen, so ist

$$\overline{\nabla}_\mu (\Phi\, \Psi) = \overline{\nabla}_\mu \Phi \cdot \Psi + \Phi \cdot \overline{\nabla}_\mu \Psi\,. \tag{9}$$

Sind diese Größen gleichartig, so daß man ihre Summe bilden kann, und haben sie das gleiche Gewicht, so ist auch

$$\overline{\nabla}_\mu (\Phi + \Psi) = \overline{\nabla}_\mu \Phi + \overline{\nabla}_\mu \Psi\,. \tag{10}$$

Auch die Überschiebungsinvarianz folgt sofort aus der gleichen Eigenschaft der affinen Übertragung.

Für die Vertauschung zweier halbinvarianter Differentiationen gilt dagegen

$$\overline{\nabla}_{[\mu} \overline{\nabla}_{\lambda]} \Phi = \nabla_{[\mu} \nabla_{\lambda]} \Phi + c\, S_{\mu\lambda} \Phi\,, \tag{11}$$

wobei

$$S_{\mu\lambda} = \partial_{[\mu} s_{\lambda]} \tag{12}$$

gesetzt ist.

Bei den Umnormungen der Gruppe ist

$$S^*_{\mu\lambda} = \partial_{[\mu} s^*_{\lambda]} = \partial_{[\mu} s_{\lambda]} = S_{\mu\lambda}\,, \tag{13}$$

also $S_{\mu\lambda}$ absolut invariant.

Aus (7) folgt, daß man dann und nur dann ϱ so bestimmen kann, daß $s^*_\mu = 0$, wenn der alternierende Tensor $S_{\mu\lambda}$ verschwindet. ϱ ist durch diese Forderung bis auf einen konstanten Faktor eindeutig festgelegt. Falls

$$S_{\mu\lambda} = 0\,, \tag{14}$$

so kann man also die Normierung der Pseudogrößen bis auf Umnormungen (5) mit konstantem ϱ eindeutig so normieren, daß $s^*_\mu = 0$. Bei dieser Normierung geht das halbinvariante Differentiationsverfahren in das gewöhnliche über. Wenden wir unsere Formeln zunächst an auf die Geometrie von Weyl! Darunter versteht man bekanntlich eine affine Übertragung, bei der ein symmetrischer Tensor $g_{\lambda\nu}$ von höchstem Rang vorhanden ist, für den eine Ableitungsformel der Form

$$\nabla_\mu g_{\lambda\nu} = -\, Q_\mu g_{\lambda\nu} \tag{15}$$

gilt[17]).

---

[17]) Vgl. R. C., Kap. VI.

Für den Tensor

$$g^{*}_{\lambda\mu} = \varrho\, g_{\lambda\mu} \tag{16}$$

folgt aus (15) die Beziehung

$$\nabla_\mu g^{*}_{\lambda\nu} = -\, Q^{*}_\mu g^{*}_{\lambda\nu}$$

mit

$$Q^{*}_\mu = Q_\mu - \partial_\mu \log \varrho\,. \tag{17}$$

Wir haben hier genau den oben postulierten Sachverhalt; für den Fundamentaltensor $g_{\lambda\nu}$ sind die Umnormungen (16) möglich. Da der Vektor Q_μ sich, wie (17) zeigt, nach (7) transformiert, können wir ihn zur Erklärung einer halbinvarianten Differentiation verwenden.

Tut man das, so wird nach (15)

$$\overline{\nabla}_\mu g_{\lambda\nu} = \nabla_\mu g_{\lambda\nu} + Q_\mu g_{\lambda\nu} = 0\,, \tag{18}$$

wie in der Riemannschen Geometrie verschwindet also jetzt die Ableitung des Fundamentaltensors.

Verschwindet die Größe

$$\nabla_{[\mu}\, Q_{\lambda]}\,, \tag{19}$$

so kann man die Normierung des Fundamentaltensors so fixieren, daß $Q_\lambda = 0$. Bei dieser Normierung geht dann die WEYLsche Geometrie in eine RIEMANNsche über.

Für das folgende wichtig ist noch die alternierende Fundamentalgröße $e_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$ der WEYLschen Geometrie.

Für jeden Pseudo-n-Vektor $a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$ von beliebigem Gewicht ist jedenfalls bei geeignetem b_μ

$$\overline{\nabla}_\mu a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} = b_\mu a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}\,. \tag{20}$$

Das folgt daraus, daß die rechte Seite in den α_i wiederum alterniert und daher nur n wesentliche Komponenten hat.

Nun ist

$$\Phi = g_{\alpha_1[\beta_1}\, g_{|\alpha_2|\beta_2}\, g_{|\alpha_3|\beta_3} \cdots g_{|\alpha_n|\beta_n]} \tag{21}$$

sowohl in den α_i wie in den β_i alternierend, wir können also setzen

$$\Phi = \varepsilon\, e_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}\, e_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}\,. \qquad \varepsilon = \pm 1. \tag{22}$$

Dann folgt einerseits aus (18), daß

$$\overline{\nabla}_\mu \Phi = 0\,, \tag{23}$$

andererseits durch Anwendung von (20)

$$\overline{\nabla}_\mu \Phi = 2\, b_\mu \Phi\,. \tag{24}$$

Es ist also für den durch (22) erklärten n-Vektor $b_\mu = 0$ und

$$\overline{\nabla}_\mu e_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} = 0. \tag{25}$$

Aus (21), (22) folgt, daß die Komponenten unseres n-Vektors den Wert $\pm\sqrt{\iota|g_{\lambda\mu}|}$ haben, wobei $\iota = \pm 1$ so gewählt sei, daß die Wurzel reell ausfällt. Setzen wir

$$e_{12\ldots n} = \sqrt{\iota|g_{\lambda\mu}|}\,, \tag{26}$$

so ist auch das Vorzeichen von $e_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$ festgelegt. $e_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$ ist wegen (21) ein Pseudo-n-Vektor vom Gewicht $n/2$.

§ 2. Anwendung auf die projektive Differentialgeometrie.

Im projektiven $n+1$-dimensionalen Raum seien zwei Hyperflächen gegeben, eine durch ihre Punkte

(1) $$\mathfrak{x}\,(u^1, u^2, \ldots u^n)\,,$$

die andere durch ihre Tangentialhyperebenen

(2) $$\mathfrak{X}\,(u^1, u^2, \ldots u^n)\,.$$ [18]

Sie seien durch gleiche Parameter eindeutig aufeinander bezogen und nicht singulär, die Punkte

(3) $$\mathfrak{x};\ \partial_\mu \mathfrak{x}; \qquad \mu = 1, 2, 3, \ldots, n$$

seien also linear unabhängig und ebenso die Ebenen

(4) $$\mathfrak{X};\ \partial_\mu \mathfrak{X}; \qquad \mu = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Die Darstellung beider Hyperflächen ist nicht eindeutig festgelegt, es bleiben noch Umnormungen

(5) $$\mathfrak{x}^* = \varrho\, \mathfrak{x}$$

und

(6) $$\mathfrak{X}^* = \sigma\, \mathfrak{X}$$

möglich, wo ϱ und σ beliebige nicht verschwindende Funktionen der Parameter u^μ sind.

In der Tangentenhyperebene der Fläche (1) sei eine $(n-1)$-dimensionale „Fernebene" festgelegt, die nicht durch $\mathfrak{x}$ geht. Dann können wir den Vektor s_μ so bestimmen, daß die Punkte

(7) $$\mathfrak{x}_\mu = \partial_\mu \mathfrak{x} + s_\mu \mathfrak{x}$$

in dieser Fernebene liegen. Bei den Umnormungen (5) müssen wir dann, damit diese Eigenschaft erhalten bleibt,

(8) $$s^*_\mu = s_\mu - \partial_\mu (\log \varrho)$$

setzen.

Dual analog dazu wählen wir durch jeden Punkt der Fläche (2) eine Gerade, die nicht in der Hyperebene $\mathfrak{X}$ liegt. Dann können wir den Vektor $\tilde{s}_\mu$ eindeutig so bestimmen, daß die Hyperebene

(9) $$\mathfrak{X}_\mu = \partial_\mu \mathfrak{X} + \tilde{s}_\mu \mathfrak{X}$$

diese Gerade enthält. Bei den Umnormungen (6) müssen wir dann analog zu (8)

(10) $$\tilde{s}^*_\mu = \tilde{s}_\mu - \partial_\mu \log \sigma$$

setzen.

Wird jetzt im Raum der Parameter u^μ eine beliebige affine Übertragung festgelegt, so nennen wir eine Größe Φ, für die bei den Umnormungen (5), (6)

(11) $$\Phi^* = \varrho^c\, \sigma^d\, \Phi\,.$$

eine Pseudogröße vom Gewicht $[c, d]$.

Genau wie im vorigen Paragraphen können wir für solche Pseudogrößen durch

(12) $$\overline{\nabla}_\mu \Phi = \nabla_\mu \Phi + (c\, s_\mu + d\, \tilde{s}_\mu)\, \Phi$$

---

[18]) Zu dem Vektor $\mathfrak{X}$ werden die $n+1$ Hyperebenenkoordinaten einer Hyperebene zusammengefaßt.

eine halbinvariante Differentiation erklären. Für diese gelten dann alle dort bewiesenen Eigenschaften, die Vertauschungsregel (1, 11) [19]) ist aber zu ersetzen durch

(13) $$\overline{\nabla}_{[\mu} \overline{\nabla}_{\nu]} \Phi = \nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]} \Phi + (c\, S_{\mu\nu} + d\, \tilde{S}_{\mu\nu})\, \Phi$$

mit

(14) $$S_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} s_{\nu]}\,, \quad \tilde{S}_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} \tilde{s}_{\nu]}\,.$$

Die Komponenten von $\mathfrak{x}$ sind Pseudoskalare vom Gewicht [1, 0], und es ist daher nach (7)

(15) $$\overline{\nabla}_\mu \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_\mu\,.$$

Ebenso sind die Komponenten von $\mathfrak{X}$ Pseudoskalare vom Gewicht [0, 1], und es ist nach (9)

(16) $$\overline{\nabla}_\mu \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_\mu\,.$$

Die Skalarprodukte

(17) $$\mathfrak{X}_\mu \mathfrak{x}_\nu = -h_{\mu\nu}$$

bilden eine Pseudogröße vom Gewicht [1, 1]. Wir setzen

(18) $$h_{(\mu\nu)} = g_{\mu\nu}\,, \quad h_{[\mu\nu]} = k_{\mu\nu}$$

und wollen annehmen, daß $g_{\mu\nu}$ den Rang n hat.

Dann können wir $g_{\mu\nu}$ als Fundamentaltensor einer WEYLschen Geometrie verwenden, wobei wir

(19) $$Q_\mu = s_\mu + \tilde{s}_\mu$$

setzen. Bei unseren Umnormungen ist nämlich nach (5), (6)

(20) $$h_{\mu\nu}{}^* = \varrho\, \sigma\, h_{\mu\nu}$$

und daher

(21) $$g_{\mu\nu}{}^* = \varrho\, \sigma\, g_{\mu\nu}\,,$$

während nach (8), (10)

(22) $$Q_\mu^* = Q_\mu - \partial_\mu \log \varrho\, \sigma.$$

Für die eben eingeführte beliebige affine Übertragung kann man also diese WEYLsche nehmen, die durch die geometrischen Gegebenheiten eindeutig festgelegt ist. Führt man jetzt zu jeder Fläche ein Begleitsimplex ein, so gelangt man zu Ableitungsformeln, die die Geometrie beider Flächen in einfacher Weise zu beherrschen gestatten.

§ 3. Hyperflächentheorie.

Wir wollen jetzt für die Hyperebenen (2,2) die Tangentenhyperebenen der Fläche (2, 1) wählen[20]). Wir haben dann also eine Hyperfläche, bei der in jeder Tangentenebene eine $(n-1)$-dimensionale „Fernebene" gegeben ist, die nicht durch den Flächenpunkt geht, und durch jeden Flächenpunkt eine „Normale", die nicht in der Tangentenebene liegt. Für die Vektoren gilt dann

(1) $$\mathfrak{X}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{X}\,\mathfrak{x}_\mu = \mathfrak{X}_\mu\,\mathfrak{x} = 0$$

---

[19]) Damit ist Formel (11) aus § 1 gemeint.

[20]) Auch andere Anwendungen sind möglich. Wählt man etwa $\mathfrak{X}$ zu $\mathfrak{x}$ polar in bezug auf eine feste nichtentartete Hyperquadrik, so erhält man die Formeln der Nichteuklidischen Geometrie.

und daher, wenn wir halbinvariante Differentiation durch angehängte Indizes angeben,

(2) $$h_{\lambda\nu} = -\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{x}_\nu = \mathfrak{X}\mathfrak{x}_{\nu\lambda} = \mathfrak{X}(\mathfrak{x}_{\lambda\nu} + 2\,S_{\lambda\nu}\mathfrak{x}) = \mathfrak{X}\mathfrak{x}_{\lambda\nu} = -\mathfrak{X}_\nu\mathfrak{x}_\lambda = h_{\nu\lambda}\,.$$

Es ist hier also

(3) $$k_{\lambda\nu} = 0$$

und

(4) $$g_{\lambda\nu} = h_{\lambda\nu} = \mathfrak{X}\mathfrak{x}_{\lambda\nu} = -\mathfrak{X}_\lambda\mathfrak{x}_\nu = \mathfrak{X}_{\lambda\nu}\mathfrak{x} = -\partial_\lambda\mathfrak{X}\,\partial_\mu\mathfrak{x}\,.$$

Der Tensor $g_{\lambda\nu}$ hängt hier also nicht von der Wahl der Fernebenen und Normalen ab. Die Kurven

(5) $$g_{\lambda\nu}\,d\,u^\lambda\,d\,u^\mu = 0$$

sind im Falle einer zweidimensionalen Fläche im R_3 die Asymptotenlinien.

Es sei jetzt $\mathfrak{y}$ ein beliebiger Punkt der Normale an unserer Flächenstelle. Da $\mathfrak{y}$ nicht in der Ebene $\mathfrak{X}$ liegt, können wir $\mathfrak{y}$ so normieren, daß

(6) $$\mathfrak{X}\mathfrak{y} = 1\,.$$

$\mathfrak{y}$ ist dann halbinvariant vom Gewicht $(0, -1)$.

Weiter sei $\mathfrak{Y}$ die Hyperebene durch $\mathfrak{y}$ und die Fernebene. Diesen Vektor können wir so normieren, daß

(7) $$\mathfrak{Y}\mathfrak{x} = 1\,.$$

$\mathfrak{Y}$ hat dann das Gewicht $(-1, 0)$.

Für unsere Punkt- und Hyperebenenvektoren gilt jetzt die Produkttabelle

(8)

	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{x}_\lambda$	$\mathfrak{y}$
$\mathfrak{X}$	0	0	1
$\mathfrak{X}_\mu$	0	$-g_{\lambda\mu}$	0
$\mathfrak{Y}$	1	0	0

Die Ableitungsgleichungen unserer Vektoren können wir unter Verwendung einer beliebigen affinen Übertragung in der Form ansetzen

(9) $$\begin{aligned}
\mathfrak{x}_{\lambda\mu} &= B_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}\,\mathfrak{x}_\nu + C_{\lambda\mu}\,\mathfrak{x} + D_{\lambda\mu}\,\mathfrak{y}\\
\mathfrak{X}_{\lambda\mu} &= \widetilde{B}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}\,\mathfrak{X}_\nu + \widetilde{C}_{\lambda\mu}\,\mathfrak{X} + \widetilde{D}_{\lambda\mu}\,\mathfrak{Y}\\
\mathfrak{y}_\lambda &= C^{\mu}_{\cdot\lambda}\,\mathfrak{x}_\mu + F_\lambda\,\mathfrak{x} + G_\lambda\,\mathfrak{y}\\
\mathfrak{Y}_\lambda &= \widetilde{C}^{\mu}_{\cdot\lambda}\,\mathfrak{X}_\mu + \widetilde{F}_\lambda\,\mathfrak{X} + \widetilde{G}_\lambda\,\mathfrak{Y}\,.
\end{aligned}$$

Aus (4) folgt dann zunächst, daß

(10) $$D_{\lambda\mu} = \widetilde{D}_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu}\,.$$

Da

(11) $$\mathfrak{x}_{[\lambda\mu]} = S_{\mu\lambda}\,\mathfrak{x} \qquad \mathfrak{X}_{[\lambda\mu]} = \widetilde{S}_{\mu\lambda}\,\mathfrak{X}\,,$$

hat man weiter

(12) $$C_{[\lambda\mu]} = S_{\mu\lambda} \qquad \widetilde{C}_{[\lambda\mu]} = \widetilde{S}_{\mu\lambda}$$

und

(13) $$B_{[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\nu} = 0 \qquad \widetilde{B}_{[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\nu} = 0\,.$$

Setzt man (9) ein in die durch Differentiation aus (8) hervorgehenden Bedingungen

$$\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{y} + \mathfrak{X} \mathfrak{y}_\lambda = 0, \quad \mathfrak{Y}_\lambda \mathfrak{x} + \mathfrak{Y} \mathfrak{x}_\lambda = 0 \tag{14}$$

$$\mathfrak{X}_{\lambda\mu} \mathfrak{x}_\sigma + \mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{x}_{\sigma\mu} = 0 \tag{15}$$

$$\mathfrak{X}_{\lambda\mu} \mathfrak{y} + \mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{y}_\mu = 0, \quad \mathfrak{Y}_\lambda \mathfrak{x}_\mu + \mathfrak{Y} \mathfrak{x}_{\mu\lambda} = 0 \tag{16}$$

$$\mathfrak{Y}_\lambda \mathfrak{y} + \mathfrak{Y} \mathfrak{y}_\lambda = 0, \tag{17}$$

so findet man

$$G_\lambda = 0, \quad \widetilde{G}_\lambda = 0 \tag{18}$$

$$g_{\nu\sigma} \widetilde{B}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + g_{\alpha\lambda} B_{\sigma\mu}^{\cdot\cdot\alpha} = 0 \tag{19}$$

$$\widetilde{C}_{\lambda\mu} - \widetilde{C}_{\cdot\mu}^{\nu} g_{\nu\lambda} = 0, \quad C_{\mu\lambda} - C_{\cdot\lambda}^{\nu} g_{\nu\mu} = 0 \tag{20}$$

$$F_\lambda + \widetilde{F}_\lambda = 0, \tag{21}$$

so daß sich die Ableitungsgleichungen (9) vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{\lambda\mu} &= B_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} \mathfrak{x}_\nu + C_{\lambda\mu} \mathfrak{x} + g_{\lambda\mu} \mathfrak{y} \\ \mathfrak{y}_\lambda &= C_{\cdot\lambda}^{\mu} \mathfrak{x}_\mu + F_\lambda \mathfrak{x} \\ \mathfrak{X}_{\lambda\mu} &= \widetilde{B}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} \mathfrak{X}_\nu + \widetilde{C}_{\lambda\mu} \mathfrak{X} + g_{\lambda\mu} \mathfrak{Y} \\ \mathfrak{Y}_\lambda &= \widetilde{C}_{\cdot\lambda}^{\mu} \mathfrak{X}_\mu - F_\lambda \mathfrak{X}. \end{aligned} \tag{22}$$

Aus

$$\begin{aligned} 2\, \mathfrak{x}_{\lambda[\mu\nu]} &= R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} \mathfrak{x}_\sigma + 2\, S_{\nu\mu} \mathfrak{x}_\lambda \\ \mathfrak{y}_{[\lambda\mu]} &= \widetilde{S}_{\lambda\mu} \mathfrak{y} \end{aligned} \tag{23}$$

folgen durch Einsetzen von (22) die Integrierbarkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} 2\, B_{\lambda\,[\mu\cdot\nu]}^{\cdot\,\cdot\tau} + 2\, B_{\lambda[\mu}^{\cdot\,\cdot\sigma} B_{|\sigma|\,\nu]}^{\cdot\,\cdot\tau} + 2\, C_{\lambda[\mu} \delta_{\nu]}^{\tau} + 2\, \widetilde{C}_{\cdot[\nu}^{\tau} g_{\mu]\lambda} \\ = - R_{\mu\nu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\tau} - 2\, S_{\mu\nu} \delta_\lambda^\tau \end{aligned} \tag{24}$$

$$C_{\lambda[\mu\nu]} + B_{\lambda[\mu}^{\cdot\,\cdot\sigma} C_{|\sigma|\nu]} + g_{\lambda[\mu} F_{\nu]} = 0 \tag{25}$$

$$B_{\lambda[\mu}^{\cdot\,\cdot\tau} g_{|\tau|\nu]} + g_{\lambda[\mu\nu]} = 0 \tag{26}$$

$$\widetilde{C}_{\cdot[\mu\nu]}^{\tau} + F_{[\mu} \delta_{\nu]}^{\tau} + \widetilde{C}_{\cdot[\mu}^{\sigma} B_{|\sigma|\,\nu]}^{\cdot\,\cdot\tau} = 0 \tag{27}$$

$$F_{[\mu\nu]} = \widetilde{C}_{\cdot[\nu}^{\sigma} C_{|\sigma|\mu]}. \tag{28}$$

Die Hyperebenenkoordinaten lassen sich mit Hilfe von (8) aus den Punktkoordinaten berechnen, führen also nicht auf neue Integrierbarkeitsbedingungen.

Man kann die affine Übertragung so einrichten, daß $B_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0$, in diesem Falle werden die Formeln in Punktkoordinaten besonders einfach. Ebenso ist der duale Ansatz möglich.

In der affinen Geometrie hat wohl zuerst L. Berwald[21]) diese Übertragung betrachtet, in der projektiven A. Norden[22]).

§ 4. Die Weylsche Geometrie.

Legen wir jetzt insbesondere die zum Pseudotensor $g_{\lambda\mu}$ gehörige Weylsche Geometrie zugrunde!

[21]) Mh. Math. Phys. **32**, 89 (1932). Vgl. auch W. Blaschke: Differentialgeometrie II, §§ 65—66.

[22]) Vgl. Fußnote [4]) auf S. 279.

Wir können dann $g_{\lambda\mu}$ zum Herauf- und Herunterziehen der Indizes benutzen, bei der Verwendung halbinvarianter Differentiation ist das unbedenklich, weil die Ableitung von $g_{\lambda\mu}$ verschwindet.

Nach (3, 20) dürfen wir jetzt statt $\mathfrak{C}^{\lambda}_{.\mu}$ auch $C^{\lambda}_{.\mu}$ schreiben, beide Symbole stellen Komponenten der gleichen Größe dar. Ebenso schreiben wir statt $\widetilde{\mathfrak{C}}^{\lambda}_{.\mu}$ weiter $\widetilde{C}^{\lambda}_{.\mu}$.

Für (3, 19) können wir hier auch

(1) $$\widetilde{B}_{\lambda\mu\sigma} + B_{\sigma\mu\lambda} = 0$$

schreiben.

Nun ist $\widetilde{B}_{\lambda\mu\nu}$ nach (3, 13) symmetrisch in λ und μ, daher $B_{\lambda\mu\nu}$ nach (1) symmetrisch in μ und ν. Da $B_{\lambda\mu\nu}$ wegen (3, 13) auch in λ und μ symmetrisch ist, ist diese Größe in den drei Indizes symmetrisch und das gleiche gilt für $\widetilde{B}_{\lambda\mu\nu}$.

(1) läßt sich jetzt in der Form schreiben

(2) $$\widetilde{B}_{\lambda\mu\nu} = - B_{\lambda\mu\nu}.$$

Da $g_{\lambda\mu\nu} = 0$, ist die Integrierbarkeitsbedingung (3, 26) hier von selbst erfüllt

Die algebraischen $(n+1)$-zeiligen Unterdeterminanten der Matrix, die von den $(n+1)(n+2)$ Komponenten der Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{\alpha}, \dots \mathfrak{x}_{\alpha_n}$ gebildet wird, bezeichnen wir mit

(3) $$(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{\alpha_1}, \mathfrak{x}_{\alpha_2} \cdots \mathfrak{x}_{\alpha_n}) \,.$$

Da die verwendeten Punkte in der Hyperebene $\mathfrak{X}$ liegen, sind diese Unterdeterminanten mit den Komponenten von $\mathfrak{X}$ proportional, und wir dürfen

(4) $$(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{\alpha_1}, \cdots \mathfrak{x}_{\alpha_n}) = D \cdot e_{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n} \mathfrak{X}$$

setzen. $e_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}$ stellt dabei den alternierenden Fundamentaltensor der zu $g_{\lambda\mu}$, Q_ν gehörenden Weylschen Geometrie dar.

Da die linke Seite in (4) das Gewicht $(n+1, 0)$, $e_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}$ das Gewicht $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$ und $\mathfrak{X}$ das Gewicht $(0, 1)$ hat, ist D ein Pseudoskalar vom Gewicht $\left(\frac{n}{2}+1, -\frac{n}{2}-1\right)$.

Ebenso können wir

(5) $$(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_{\alpha_1}, \dots \mathfrak{X}_{\alpha_n}) = \widetilde{D}\, e_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} \mathfrak{x}$$

setzen, $\widetilde{D}$ ist dann ein Pseudoskalar vom Gewicht $\left(-\frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}+1\right)$.

Für die Determinanten der in (3, 8) verwendeten Punkt- bzw. Ebenenvektoren folgt aus (4), (5) wegen (1, 26)

(6) $$\begin{aligned} (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \cdots \mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}) &= D\, e_{1\,2 \cdots n}\, \mathfrak{X}\mathfrak{y} = D \sqrt{\iota\, |g_{\lambda\mu}|} \\ (\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n, \mathfrak{Y}) &= \widetilde{D}\, e_{1\,2 \cdots n}\, \mathfrak{x}\mathfrak{Y} = \widetilde{D} \sqrt{\iota\, |g_{\lambda\mu}|}. \end{aligned}$$

Andererseits ist nach (3, 8)

(7) $$(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n, \mathfrak{Y})\, (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \cdots \mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}) = |g_{\lambda\mu}| \,.$$

Aus (6), (7) folgt

(8) $$D\widetilde{D} = \iota; \quad \widetilde{D} = \iota\, D^{-1}.$$

Durch Differentiation folgt aus (6) mit Hilfe von (3, 22), (1, 25)

(9) $$B_{\lambda\nu}^{\cdot\cdot\nu} = \frac{D_\lambda}{D}.$$

Für die Größe D ist bei den Umnormungen (2, 5), (2, 6)

(10) $$D^* = \left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)^{\frac{n}{2}+1} D\,.$$

Man kann also die Normierung von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ stets so einrichten, daß D eine Konstante wird. Solche Normierungen hat bekanntlich E. Čech mit Erfolg verwendet[23]).

Die Konstanz von D bleibt bei den Umnormungen erhalten, wenn wir in (2, 5), (2, 6)

$$\sigma = \varrho$$

setzen. Bei solchen Umnormungen ist nach (2,8), (2,10) der Vektor

(11) $$\Theta_\nu = s_\nu - \tilde{s}_\nu$$

invariant.

Natürlich wird man zu besonders einfachen Formeln gelangen, wenn dieser Vektor verschwindet. Da dann s_ν und $\tilde{s}_\nu$ übereinstimmen, braucht man dann für Pseudogrößen nicht mehr zwei Gewichtszahlen anzugeben, nur ihre Summe ist wesentlich.

Für

(12) $$\Theta_\nu = 0\,, \qquad D = \text{konst.}$$

ist offenbar

(13) $$D_\nu = 0$$

und daher nach (9)

(14) $$B_{\lambda\nu}^{\cdot\cdot\nu} = g^{\mu\nu} B_{\lambda\mu\nu} = 0.$$

Die quadratische Form

(15) $$g_{\lambda\mu}\, du^\lambda\, du^\mu$$

und die kubische

(16) $$B_{\lambda\mu\nu}\, du^\lambda\, du^\mu\, du^\nu$$

sind daher dann und nur dann zueinander apolar, wenn bei geeigneter Normierung (12) gilt.

Wegen (3,8) und (3,22) ist die Bedingung (14) gleichwertig mit

(17) $$\mathfrak{X}_\mu\, g^{\lambda\nu}\, \mathfrak{x}_{\lambda\nu} = 0.$$

Auf Grund der Tabelle (3, 8) bedeutet das, daß der Punkt

(18) $$g^{\lambda\nu}\, \mathfrak{x}_{\lambda\nu}$$

eine Linearkombination von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ist.

Wenn (12) gilt, so erhält man daher einen Punkt der Normalen, wenn man den zweiten Beltramischen Differentialoperator der Weylschen Geometrie auf den Punkt $\mathfrak{x}$ anwendet.

Die Bedingung (17) bedeutet offenbar geometrisch, daß die Wahl der Normalen in bestimmter Weise mit derjenigen der Fernebenen gekoppelt wird.

Den Koordinatenvektor $\mathfrak{p}$ eines beliebigen Punktes in unserem Raum können wir aus den linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}_\mu$ linear bestimmen; ist

[23]) Vgl. l. c. [5]).

(19) $$\mathfrak{p} = \mathrm{p}\,\mathfrak{x} + p^\mu\,\mathfrak{x}_\mu + \mathbf{p}\,\mathfrak{y},$$

so nennen wir p, p^μ, $\mathbf{p}$ die lokalen Koordinaten von $\mathfrak{p}$.

Wie ändern sie sich, wenn wir Fernebene und Normale so ändern, daß Θ_ν invariant bleibt?

Setzen wir

(20) $$'s_\nu = s_\nu + \alpha_\nu\,,$$

so ist dann

(21) $$'\tilde{s}_\nu = \tilde{s}_\nu + \alpha_\nu$$

und daher

(22) $$'\mathfrak{x}_\nu = \mathfrak{x}_\nu + \alpha_\nu\,\mathfrak{x}\,,\quad '\mathfrak{X}_\nu = \mathfrak{X}_\nu + \alpha_\nu\,\mathfrak{X}\,.$$

Da

(23) $$'\mathfrak{X}_\nu\,'\mathfrak{y} = 0$$

sein muß, folgt daraus und aus

(24) $$\mathfrak{p} = '\mathrm{p}\,'\mathfrak{x} + 'p^\mu\,'\mathfrak{x}_\mu + '\mathbf{p}\,'\mathfrak{y}\,.$$

daß

(25) $$\begin{aligned} \mathrm{p} &= '\mathrm{p} + \alpha_\nu\,'p^\nu + \varkappa\,'\mathbf{p} \\ p^\nu &= p^\nu + \alpha^\nu\,'\mathbf{p}' \\ \mathbf{p} &= '\mathbf{p} \end{aligned}$$

mit beliebigem $\varkappa$.

Nun behält die Gleichung

(26) $$2\,\mathrm{p}\,\mathbf{p} - g_{\lambda\mu}\,p^\lambda\,p^\mu + 2\,j\,\mathbf{p}^2 = 0\,,$$

in der der Parameter j beliebig gewählt werden kann, bei der Transformation (25) ihre Gestalt. Diese Gleichung stellt ein Büschel von Hyperquadriken dar, dem die doppeltzählende Tangentenhyperebene der Fläche angehört und in bezug auf den die Normale an unserer Flächenstelle zur Fernebene polar ist.

Daraus sieht man, wie Normale und Fernebene bei Konstanz von D und fester Wahl von Θ_ν miteinander gekoppelt sind; sie sind zueinander polar in bezug auf die Quadriken eines festen Büschels (26).

Man prüft leicht nach, daß diese Quadriken die Fläche in zweiter Ordnung berühren.

Ist $\Theta_\nu = 0$ für konstantes D, so erhalten wir ein Büschel (26), das invariant mit der Hyperfläche verknüpft ist. Bei einer zweidimensionalen Fläche im R_3 sind dies die Quadriken von Darboux, wie im nächsten Paragraphen gezeigt wird. Die Nullrichtungen der Form (16) sind in diesem Fall die Darbouxrichtungen.

Der Tensor $B_{\lambda\mu\nu}$ ist auch im allgemeinen Fall bei den Transformationen (20), (21) invariant.

§ 5. Asymptotenlinienparameter.

Beschränken wir uns jetzt auf zweidimensionale Flächen im dreidimensionalen Raum, die keine Torsen sind und reelle Asymptotenlinien besitzen[24])

Wir können dann Asymptotenlinienparameter verwenden, für solche Parameter schreiben wir

(1) $$u^1 = u,\quad u^2 = v\,.$$

[24]) Auch auf elliptisch gekrümmte Flächen läßt sich die Theorie anwenden, wenn man komplexe Größen heranzieht.

Nach (3, 5) ist jetzt

$$g_{11} = g_{22} = 0\,. \tag{2}$$

Die „Fernebene“ ist hier eine Ferngerade, die man auch „Normale zweiter Art“ nennt. Wir wählen sie und die Normale erster Art so, daß Θ_ν bei konstantem D verschwindet.

Lassen wir dann nur noch Umnormungen

$$\mathfrak{x}^* = \varrho\,\mathfrak{x}\,, \quad \mathfrak{X}^* = \varrho\,\mathfrak{X} \tag{3}$$

zu, so ist stets

$$s_\nu = \tilde{s}_\nu\,. \tag{4}$$

Für $g_{\lambda\nu}$ ist dann

$$g^*_{\lambda\nu} = \varrho^2\, g_{\lambda\nu}\,. \tag{5}$$

Wir brauchen hier nur noch die Summe beider Gewichtszahlen zu beachten, $g_{\lambda\nu}$ nennen wir daher einen Pseudotensor vom Gewicht 2, während $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}$ nach (3) beide das Gewicht 1 haben.

Wir wollen nun bei jeder Wahl der Asymptotenlinienparameter u, v die Normierung so festlegen, daß

$$g_{12} = \pm\,1\,. \tag{6}$$

Bei der Parametertransformation

$$u = \varphi\,(u^*)\,, \qquad v = \psi\,(v^*) \tag{7}$$

$$d\,u = \varphi'\,d^*\,u\,, \quad d\,v = \psi'\,d\,v^* \tag{8}$$

ist jetzt für jeden kovarianten Vektor w_λ

$$w_1 = \varphi'\,w_1^*\,, \quad w_2 = \psi'\,w_2^*\,, \tag{9}$$

für jeden kontravarianten Vektor dagegen

$$z^1 = \varphi'^{-1}\,z^{1*}\,, \quad z^2 = \psi'^{-1}\,z^{2*}\,. \tag{10}$$

Für g_{12} folgt daraus

$$g_{12} = \varphi'\,\psi'\,g^*_{12}\,. \tag{11}$$

Soll also die Normierung (6) bei den Parametertransformationen (7) erhalten bleiben, so muß man jede solche Transformation koppeln mit einer Umnormung (5), wobei

$$\varrho = \varphi'^{\,-\frac{1}{2}}\,\psi'^{\,-\frac{1}{2}}\,. \tag{12}$$

Für einen Pseudoskalar a vom Gewicht c wird dann

$$a^* = \varrho^c\,a = \varphi'^{\,-\frac{c}{2}}\,\psi'^{\,-\frac{c}{2}}\,a\,. \tag{13}$$

In der Weylschen Geometrie, die zum Fundamentaltensor $g_{\lambda\nu}$ und dem Eichvektor Q_μ gehört, ist bekanntlich[25])

$$\Gamma'^{\,\nu}_{\lambda\mu} = \left\{{\lambda\mu \atop \nu}\right\} + \frac{1}{2}\left(Q_\mu\,\delta_\lambda^\nu + Q_\lambda\,\delta_\mu^\nu - Q_\alpha\,g^{\alpha\nu} g_{\lambda\mu}\right). \tag{14}$$

Dabei ist $g^{\alpha\nu}$ der zu $g_{\alpha\nu}$ inverse Tensor, also nach (2), (6)

$$g^{11} = g^{22} = 0 \qquad g^{12} = \pm\,1\,. \tag{15}$$

Da die $g_{\alpha\nu}$ konstant sind, ist in unserem Falle

$$\left\{{\lambda\,\mu \atop \nu}\right\} = 0\,.$$

[25]) Vgl. R. C., S. 216.

Da nach (2, 19) und wegen $\tilde{s}_\nu = s_\nu$

(16) $$Q_\nu = 2\, s_\nu\,,$$

finden wir aus (14)

(17) $$\begin{aligned} &\Gamma_{1\,1}^{\;1} = 2\, s_1, \quad &&\Gamma_{1\,2}^{\;1} = 0, \quad &&\Gamma_{2\,2}^{\;1} = 0 \\ &\Gamma_{1\,1}^{\;2} = 0\,, &&\Gamma_{1\,2}^{\;2} = 0, &&\Gamma_{2\,2}^{\;2} = 2\, s_2\,. \end{aligned}$$

Für die Ableitungen eines kontravarianten Vektors folgt daraus

(18) $$\begin{aligned} &w_{11} = \partial_u w_1 - 2\, s_1 w_1\,, \quad &&w_{21} = \partial_u w_2\,, \\ &w_{12} = \partial_v w_1\,, &&w_{22} = \partial_v w_2 - 2\, s_2 w_2\,, \end{aligned}$$

für diejenigen eines kontravarianten Vektors

(19) $$\begin{aligned} &z^1_{.1} = \partial_u z^1 + 2\, s_1 z^1\,, \quad &&z^2_{.1} = \partial_u z^2\,, \\ &z^1_{.2} = \partial_v z^1, &&z^2_{.2} = \partial_v z^2 + 2\, s_2 z^2. \end{aligned}$$

Für einen Pseudoskalar vom Gewicht c ist weiter

(20) $$a_1 = \partial_u a + c\, s_1\, a, \qquad a_2 = \partial_v a + c\, s_2\, a\,.$$

Wir wollen nun eine Funktion $b\,(u, v)$ der Parameter eine Halbinvariante vom Gewicht $[m, n]$ nennen, wenn sie sich bei den Parametertransformationen (7) transformiert nach der Regel

(21) $$b^* = \varphi^{1-m}\, \psi^{1-n}\, b\,.$$

Die Komponenten der Größen unserer Geometrie sind dann solche Halbinvarianten, denn das gilt nach (18), (19), (20) für Vektoren und Pseudoskalare, und aus diesen läßt sich jede Größe durch Produkt- und Summenbildung zusammensetzen.

Unter den halbinvarianten Ableitungen einer Halbinvarianten b vom Gewicht $[m, n]$ in bezug auf s_1 und s_2 verstehen wir jetzt die Ausdrücke

(22) $$b_1 = \partial_u b + m\, s_1\, b\,, \qquad b_2 = \partial_v b + n\, s_2\, b\,.$$

Für dieses Differentiationsverfahren von Halbinvarianten gelten dann, wie man sofort nachprüft, die Produktregel und die Summenregel, bei letzterer müssen naturgemäß beide Summanden die gleichen Gewichtszahlen besitzen.

Wendet man nun dieses Differentiationsverfahren an auf einen Vektor oder auf einen Pseudoskalar, so erhält man nach (18), (19), (20) und wegen (8), (10), (13) das gleiche Ergebnis wie bei der halbinvarianten Differentiation der Weylschen Geometrie.

Da Summen- und Produktregel für beide Differentiationsverfahren gelten, gilt dann das gleiche für die Komponenten jeder Pseudogröße dieser Geometrie.

Für zweidimensionale Flächen im dreidimensionalen Raum bei Verwendung von Asymptotenlinienparametern ist also die halbinvariante Differentiation der Weylschen Geometrie als Sonderfall in der durch (22) erklärten Regel enthalten.

Das Differentiationsverfahren (22) hat der Verfasser vor einigen Jahren angegeben[26]), es gestattet die Rechnungen in Asymptotenlinienparametern so zu führen, daß sämtliche vorkommenden Ausdrücke halbinvariant sind und deshalb geometrische Bedeutung haben.

[26]) Comm. Math. Helvet. 18, 128 (1946).

Vor den allgemeinen Formeln des Ricci-Kalküls hat es in seinem Anwendungsbereich den Vorzug, daß in die Ableitungen einer Invarianten nur die Invariante selbst eingeht und nicht auch die anderen Komponenten der gleichen Größe, was sehr zur Übersichtlichkeit der Rechnungen beiträgt.

Untersuchen wir noch, welche Quadriken hier durch (4,26) dargestellt werden. Das ergibt sich am einfachsten, wenn man

(23) $$s_\nu = \tilde{s}_\nu = 0$$

wählt. Nach (2, 7) ist dann

(24) $$\mathfrak{x}_1 = \partial_u \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_u, \quad \mathfrak{x}_2 = \partial_v \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_v,$$

und da (4, 12) gilt, kann man

(25) $$\mathfrak{y} = g^{\lambda\nu} \mathfrak{x}_{\lambda\nu}$$

setzen.

Wegen (15) und (18) folgt daraus

(26) $$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_{uv}.$$

Die lokalen Koordinaten eines Punktes $\mathfrak{p}$ werden jetzt durch

(27) $$\mathfrak{p} = \mathrm{p}\,\mathfrak{x} + p^1 \mathfrak{x}_u + p^2 \mathfrak{x}_v + \mathbf{p}\,\mathfrak{x}_{uv}$$

erklärt, während (4, 26) hier die Form annimmt

(28) $$\mathrm{p}\,\mathbf{p} - p^1 p^2 - j\,\mathbf{p}^2 = 0.$$

Bekanntlich stellt aber (28) in diesem Falle die Quadriken von Darboux dar, wie in § 4 behauptet wurde.

§ 6. Schlußbemerkungen.

Wir müssen hier darauf verzichten, die Theorie auch nur für zweidimensionale Flächen im R_3 vollständig auszubauen[27]). Einige der wichtigsten Zusammenhänge sollen aber noch erwähnt werden.

Wie man leicht nachprüft, ist die Normalenkongruenz dann und nur dann zur Fläche konjugiert, wenn $\tilde{C}_{\lambda\mu}$ symmetrisch ist, was bedeutet, daß sich $\tilde{s}_\lambda$ zu 0 normieren läßt. Ebenso ist die Ferngeradenkongruenz dann und nur dann konjugiert, wenn $C_{\lambda\mu}$ symmetrisch ist, also wenn sich s_λ zu 0 normieren läßt.

Gilt beides, so ist unsere Geometrie eine Riemannsche und man kann die halbinvariante Differentiation wieder beseitigen.

Beschränken wir uns weiterhin auf Kongruenzpaare, für die (4, 12) gilt, die also in bezug auf die Darboux-Quadriken an jeder Stelle polar sind.

Diese Normalen sind dann und nur dann die von Fubini, wenn

(1) $$B_{\lambda\mu\nu\varrho} B^{\lambda\mu\nu} = 0.$$

dann und nur dann die von Green, wenn

(2) $$B_{\lambda\mu\nu\varrho} B^{\lambda\mu\varrho} = 0,$$

und dann und nur dann die von Wilczynski, wenn

(3) $$B_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0.$$

[27]) Die wesentlichsten Ergebnisse sollen dargestellt werden in Band 2 der Projektiven Differentialgeometrie des Verfassers; voraussichtlich wird dieser Band im kommenden Jahr erscheinen.

Die letztere Bedingung bedeutet, daß $B_{\lambda\mu\nu\varrho}$ in allen vier Indizes symmetrisch ist. Die Formeln werden in diesem Falle besonders einfach; wählt man noch $\mathfrak{y}$ im Schnittpunkt der Normalen mit der Lie-Quadrik, so ist

$$\tilde{C}_{\lambda\mu} = C_{\lambda\mu} \tag{4}$$

und $C_{\lambda\mu\nu}$ in den drei Indizes symmetrisch.

Weiter gilt

$$F_\lambda = B_{\lambda\mu\nu} C^{\mu\nu}, \tag{5}$$

und schließlich ist

$$B_{\lambda\mu[\nu} C^{\mu}_{\cdot\sigma]} = 0, \tag{6}$$

also auch die Größe

$$B_{\lambda\mu\nu} C^{\mu}_{\cdot\sigma} \tag{7}$$

in den drei freien Indizes symmetrisch.

Für die Projektivminimalflächen[28]) ist hier

$$B^{\lambda\mu\nu} C_{\lambda\mu\nu} = 0. \tag{8}$$

Die isotherm-asymptotischen Flächen werden gekennzeichnet durch

$$C_{[\lambda\mu]} = 0, \tag{9}$$

die Koinzidenzflächen durch

$$B_{\lambda\mu\nu\varrho} = 0, \tag{10}$$

die Flächen, deren Asymptotenlinien linearen Komplexen angehören, durch

$$C_{[\lambda\mu]} = 0, \quad C^{\lambda}_{\cdot\lambda} = 0. \tag{11}$$

Für die Flächen von Demoulin, bei denen die vier von der vorgegebenen Fläche verschiedenen Hüllflächen der Lie-Quadriken zusammenfallen, ist

$$F_\lambda = 0 \tag{12}$$

kennzeichnend, während diese Hüllflächen dann und nur dann paarweise zusammenfallen, wenn

$$2\, C_{\lambda\mu} C^{\lambda\mu} - C^{\lambda}_{\cdot\lambda} C^{\mu}_{\cdot\mu} = 0. \tag{13}$$

Es sei hier noch eine Bemerkung zur Projektivabwicklung von Flächen angeführt. In der Literatur versteht man darunter bekanntlich eine eineindeutige Abbildung zweier Flächen aufeinander, bei der die Projektivbogenlänge erhalten bleibt.

Wird die Abbildung durch gleiche Parameterwerte vermittelt, so bedeutet das, daß die beiden Grundformen (4, 15) und (4, 16) auf beiden Flächen bei geeigneter Normierung übereinstimmen, die erste Bedingung bedeutet, daß beide entsprechende Asymptotenlinien haben.

Es stellt sich dann heraus, daß im zweidimensionalen Fall nur die Flächen einer kleinen Klasse projektiv abwickelbar sind und daß bei höherer Dimensionszahl eine solche Abwicklung überhaupt nur trivial, also durch Projektivitäten möglich ist.

Man kann aber auch auf andere Weise zu einem Analogon der klassischen Abwicklung gelangen. Kennzeichnend für diese ist ja, daß auf beiden Flächen

[28]) Das sind die Flächen, bei denen die erste Variation der Projektivoberfläche verschwindet. Sie wurden zuerst von G. Thomsen betrachtet, Abh. Math. Sem. Hamburg 4, 232 (1925).

die Bogenelemente übereinstimmen, so daß auf beiden die gleiche RIEMANNsche Geometrie herrscht. Ebenso kann man sagen, daß zwei Flächen, denen Normalenkongruenzen aufgeprägt sind und die durch gleiche Parameterwerte eineindeutig aufeinander bezogen sind, aufeinander abgewickelt sind, wenn ihre WEYLschen Geometrien übereinstimmen.

Das ist offenbar dann und nur dann der Fall, wenn sich die Normierungen so einrichten lassen, daß

$$g_{\lambda\mu}, \quad s_\lambda, \quad \tilde{s}_\lambda$$

an entsprechenden Stellen beider Flächen übereinstimmen.

Die Gleichheit von $g_{\lambda\mu}$ bedeutet, daß sich auch hier auf beiden Flächen die Asymptotenlinien entsprechen müssen. Sind aber zwei Flächen so aufeinander bezogen, so kann man durch geeignete Wahl der Normalenkongruenzen stets erreichen, daß auch s_λ und $\tilde{s}_\lambda$ übereinstimmen, daß also die Abbildung eine Abwicklung wird.

Insbesondere kann man also jede Fläche auf eine Quadrik abwickeln. Wir erwähnen darüber den Satz:

Die WEYLsche Geometrie einer Fläche in bezug auf zwei Normalenkongruenzen, für die (4, 12) gilt, ist dann und nur dann euklidisch metrisch[29]), wenn bei Abwicklung der Fläche auf eine Quadrik Q die Normalen übergehen in die nichteuklidischen Normalen einer Fläche von BIANCHI[30]) der inneren Krümmung 0 in der nichteuklidischen Geometrie mit der absoluten Fläche Q.

Wir hoffen, später einmal auf diese Fragen zurückkommen zu können.

---

[29]) Vgl. R. C., S. 171.

[30]) Vgl. etwa W. BLASCHKE: Hamburger Math. Einzelschr. 34 (1942).

(Eingegangen am 1. Februar 1950.)

Math. Annalen, Bd. 122, S. 296—298 (1950).

Completeness of Łukasiewicz-Tarski Propositional Calculi.

By

Alan Rose in Manchester.

In 1930 Łukasiewicz and Tarski[1]) developed m-valued propositional calculi with two primitive functions which they called implication and negation. If the m truth-values are denoted by the numbers $\frac{i}{m-1}$ $(0 \leqq i \leqq m-1)$ and 1 is regarded as the highest truth-value, then the truth-tables of these functions are determined as follows:

(I) If $\mathfrak{A}$ has the truth-value x, and $\bar{\mathfrak{A}}$ has the truth-value y, then $y = 1 - x$.

(II) If $\mathfrak{A}$ has the truth-value x, $\mathfrak{B}$ has the truth-value y, and $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ has the truth-value z, then

$$\text{if } x \leqq y, z = 1,$$

$$\text{if } x > y, z = 1 - x + y.$$

A system is said to be *functionally complete* if, given any truth-table, a function with that truth-table can be defined in terms of the primitive functions.

Słupecki[2]) has shown that when $m \geqq 3$ the Łukasiewicz-Tarski systems are not functionally complete. These systems have been formalised by Rosser and Turquette[3]).

A formalisation of a propositional calculus is said to be *weakly complete* if all formulae which take designated truth-values exclusively are provable in terms of the axioms and rules of procedure of the formalisation.

A formalisation is said to be *strongly complete* if, when we add an unprovable formula as an axiom to those of the given formalisation, all formulae become provable in the formalisation.

Post[4]) has shown that the two forms of completeness are equivalent in functionally complete systems. Rosser and Turquette have shown that their formalisations are weakly complete and suggest that the relationship between the two forms of completeness for Łukasiewicz-Tarski propositional calculi is worthy of investigation[5]), although they do not themselves discuss it. Słupecki[6]) has shown that Wajsberg's weakly complete formalisation[7]) of the three-valued calculus with one designated truth-value is not strongly complete. The object of the present paper is to investigate the relationship between the two forms of completeness for an m-valued propositional calculus with s $(1 \leqq s \leqq m-1)$ designated truth-values.

Lemma: *If, for all* i, X_i *takes the truth-value* t_i $(1 \leqq i \leqq n)$,

[1]) Łukasiewicz, Jan, a. Alfred Tarski: C. r. Soc. Sci. Lettr. Warschau, Cl. III, **23**, 30 (1930).

[2]) Słupecki, Jerzy: C. r. Soc. Sci. Lettr. Warschau, Cl. III, **29**, 9 (1936).

[3]) Rosser, J. B., a. A. R. Turquette: J. Symbol. Log. **10**, 61 (1945).

[4]) Post, Emil L.: Amer. J. Math. **43**, 163 (1921).

[5]) op. cit.

[6]) Słupecki, Jerzy: Ann. Univ. Lublin **1**, Nr. 3, 193 (1946).

[7]) Wajsberg, M.: C. r. Soc. Sci. Lettr. Warschau, Cl. III, **24**, 259 (1931).

$\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ is a propositional function of $X_1, X_2, \ldots, X_n$,
$\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ takes the truth value x, and $t_i\,(t_i - 1) = 0$,
then $x = 1$ or $x = 0$.

We prove this by strong induction on the number of propositional variables occurring in Φ. A variable which occurs k times is here reckoned as k variables. Thus three variables occur in

$$X_1 \to (X_2 \to X_1)$$

We define $\overline{\mathfrak{A}}^{\alpha}$ by

$$\overline{\mathfrak{A}}^{1} =_{\mathrm{df.}} \overline{\mathfrak{A}}$$
$$\overline{\mathfrak{A}}^{\alpha+1} =_{\mathrm{df.}} \overline{\overline{\mathfrak{A}}^{\alpha}}.$$

If Φ contains only one propositional variable, then either Φ is X_1, or Φ is of the form $\overline{X_1}^{\alpha}$. In this case the lemma follows at once from the definition of negation.

We assume the lemma for all formulae with not more than n propositional variables and prove it for $n + 1$. If Φ contains $n + 1$ propositional variables, it will be of one of the forms

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$
$$\overline{\mathfrak{C}}^{\alpha}$$

where neither $\mathfrak{A}$ nor $\mathfrak{B}$ contains more than n propositional variables and $\mathfrak{C}$ contains $n + 1$ propositional variables and $\mathfrak{C}$ is not of the form $\overline{\mathfrak{D}}^{\beta}$. The lemma now follows at once from the definitions of implication and negation.

We consider the effect of adding an unprovable formula $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ as an axiom to those of the formalisation. We shall assume that the formalisation possesses the following properties:

(I) It is weakly complete.

(II) A primitive rule of procedure is:

α) In any correct formula, any propositional variable may be replaced by a propositional function, provided that this replacement is carried out for all occurrences of the propositional variable.

(III) A primitive rule of procedure is

β) If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{A} \xrightarrow[m]{s} \mathfrak{B}$ are correct formulae, then $\mathfrak{B}$ is a correct formula where $\xrightarrow[m]{1}$ is[8]) $\longrightarrow$, and when $s > 1$, $\xrightarrow[m]{s}$ is defined in terms of the primitive functions in such a way that the truth-value of $\mathfrak{A} \xrightarrow[m]{s} \mathfrak{B}$ is undesignated when and only when the truth-value of $\mathfrak{A}$ is designated and the truth-value of $\mathfrak{B}$ is undesignated.

(IV) The formalisation has only two primitive rules of procedure.

We have to consider two cases.

Case I. The truth-value of Φ is designated whenever $t_i\,(t_i - 1) = 0$. It follows from the lemma that when $t_i\,(t_i - 1) = 0$, the truth-value of Φ is 1. Similarly the other axioms all take the truth-value 1 whenever all propositional variables occurring in them have truth-values which satisfy $x\,(x - 1) = 0$. Any formula satisfying this condition will be said to satisfy condition (A).

[8]) In the case $s = 1$, we could alternatively use an implication function whose truth-value is undesignated when and only when the truth-value of $\mathfrak{A}$ is designated and the truth-value of $\mathfrak{B}$ is undesignated.

Any formula deduced from formulae satisfying condition (A) by means of Rule α), satisfies condition (A), since, by the lemma, if Ψ ($X_\alpha, X_\beta, \ldots, X_\varkappa$) is substituted for a single propositional variable and $X_\alpha, X_\beta, \ldots, X_\varkappa$ take truth-values satisfying $x\ (x-1) = 0$, then the truth-value of Ψ satisfies $x\ (x-1) = 0$. Hence the derived formula satisfies condition (A).

Any formula deduced from formulae satisfying condition (A) by means of Rule β) satisfies condition (A), since when the truth-values of all propositional variables occurring in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \xrightarrow[m]{s} \mathfrak{B}$ satisfy $x\,(x-1) = 0$, the truth-values of $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \xrightarrow[m]{s} \mathfrak{B}$ are 1 by condition (A). Hence it follows from the definition of $\xrightarrow[m]{s}$ that the truth-value of $\mathfrak{B}$ is designated in the above circumstances and by the lemma this designated truth-value must be 1. Thus $\mathfrak{B}$ satisfies condition (A).

Now when X takes the truth-value 1, $X \to \overline{X}$ takes the truth-value 0. Hence $X \to \overline{X}$ does not satisfy condition (A) and is therefore not provable. Thus the adjunction of Φ as an axiom to the axioms of the formalisation does not cause all formulae to become provable.

Case II. There exist numbers t_i such that, for all i, $t_i\,(t_i - 1) = 0$ and such that when X_i takes the truth-value t_i, Φ takes an undesignated truth-value.

By the lemma this undesignated truth-value must be 0. Suppose that

$$t_{a_1}, t_{a_2}, \ldots, t_{a_j} = 1$$

$$t_{a_{j+1}}, t_{a_{j+2}}, \ldots, t_{a_n} = 0$$

where $0 \leqq j \leqq n$; $1 \leqq a_k \leqq n$ when $1 \leqq k \leqq n$; and $a_k \neq a_l$ when $1 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq l \leqq n$, $k \neq l$.

If by Rule α) we substitute $X \to X$ for X_i when $i = a_\mu$ and $1 \leqq \mu \leqq j$ and we substitute $\overline{X \to X}$ for X_i when $i = a_\mu$ and $j < \mu \leqq n$, we deduce a formula Ψ (X) which always takes the truth-value 0.

In view of the weak completeness

$$\Psi\,(X) \xrightarrow[m]{s} X$$

is provable. Hence X follows at once from Rule β).

It now follows at once that any formula $\mathfrak{A}$ is provable by means of Rule α).

Thus we have proved the following

Theorem: *If we add an unprovable formula as an axiom to the axioms of a formalisation of an m-valued* ($m \geqq 3$) ŁUKASIEWICZ-TARSKI *Propositional Calculus satisfying conditions* (I), (II), (III), (IV), *a necessary and sufficient condition that all formulae become provable in the formalisation is that the original unprovable formula is not an identical formula of the 2-valued Propositional Calculus.*

I should like to express my gratitude to the referee, Professor BETH, and to Professor VAN DER WAERDEN for their help in the preparation of the manuscript.

(Eingegangen am 9. Februar 1950.)